

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

50e jaargang
1974/1975
no 4/5
december/januari

Meetkundenummer

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 25,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 26,50. Aanmeldingen van nieuwe abonnees en verzoeken om toezending van losse afleveringen te richten tot Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.
Tarieven: $^1/_1$ pag. *f* 225,—, $^1/_2$ pag. *f* 120,— en $^1/_4$ pag. *f* 67,50.

De prijs van deze aflevering bedraagt ***f* 9,50.** Bestellingen kunnen geschieden op de hierboven aangegeven wijze.

Geachte lezer,

Het jubileumnummer van Euclides mag dan voor wat betreft omvang en kleurgebruik niet representatief zijn, de inhoud is dat wel. De belangstelling voor Euclides groeit dan ook. Die omvang en het kleurgebruik hebben er tot onze spijt wel toe geleid dat u dit nummer erg laat ontvangt. Het gecombineerde februari/maart-nummer zal ook later verschijnen. Daarna zijn de problemen voorbij en kunt u Euclides op tijd verwachten.
Indien uw interesse door lezing van dit nummer, of een gedeelte ervan of anderszins is gewekt kunt u zich abonneren of lid worden van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
De wegen die u daartoe kunt bewandelen vindt u omschreven op de binnenzijde van het omslag.

Wolters Noordhoff bv.

Inhoud

Meetkunde-nummer

Dit dubbelnummer van EUCLIDES – ter gelegenheid van zijn vijftigste verjaardag in een feestjasje gestoken – is gewijd aan de meetkunde.

Waarom?

Het antwoord op deze vraag vinden we al in het artikel van de heren Treffers en de Moor in het eerste nummer van deze jaargang. We lezen daarin dat een brochure van mevr. T. Ehrenfest-Afanassjewa de aanleiding was tot heftige diskussies over het meetkunde-onderwijs en daardoor tot de oprichting van een tijdschrift voor de didaktiek der exacte vakken. Dat was in oktober 1924. Het tijdschrift verscheen oorspronkelijk als Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde. In 1927 verkreeg het de naam EUCLIDES.

Hoe het Euclides in zijn eerste jaren verging wordt ons beschreven door Dr. Joh. Wansink. Zijn artikel sluit aan bij de historische artikelen van Treffers en de Moor, die in de nummers 1, 2 en 3 van deze jaargang verschenen als voorbereiding voor dit jubileumnummer. We zien daarin hoe de diskussie in de loop van de vijftig jaar voortging. Maar we krijgen de indruk dat juist in de laatste jaren, tengevolge van het invoeren van een nieuw leerplan en het toepassen van nieuwe leermethoden, de diskussie intenser geworden is, niet alleen in Nederland maar ook in de ons omringende landen.

Het verheugt de redactie dat zij, die een uitnodiging ontvingen om een bijdrage voor dit nummer te leveren, daaraan dadelijk gehoor gaven. We stellen hun medewerking zeer op prijs. We hopen dat hun artikelen aanleiding zullen zijn om de diskussie voort te zetten. Ze dragen daartoe veel en waardevol materiaal aan.

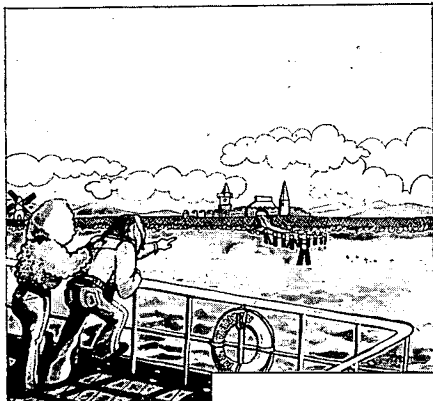
G. Krooshof

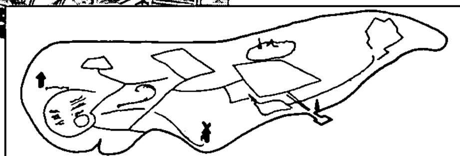
Inleiding en leeswijzer

FRED GOFFREE

Den Dolder

0 *Dertien meetkunde-onderwijsleersituaties*

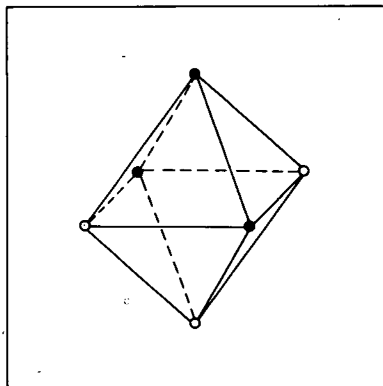




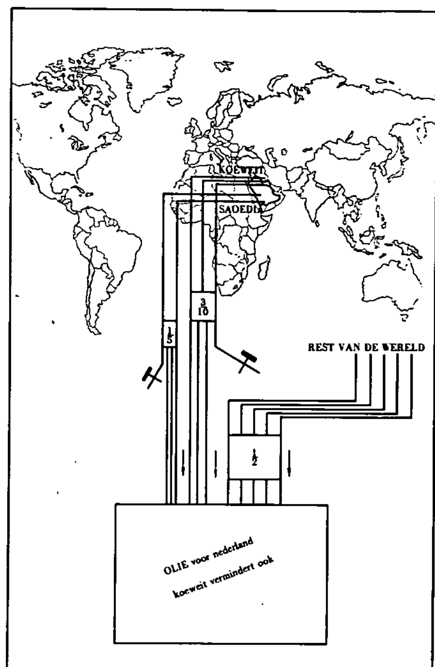
De kinderen hebben zojuist een 'foto' gekregen. Voor de klas hangt de plaat van een groot eiland, Waterland; en de vraag luidt:
wie kan precies zeggen waar deze foto genomen is . . . . .

*

In de scheikundeles is het verschijnsel van de stereo-isomeren aan de orde. Moleculen van (geometrische) isomeren bestaan uit dezelfde groepen van elementen en hebben structuren, die niet door een beweging maar wel door een spiegeling in elkaar kunnen overgaan. De vraag luidt: hoeveel verschillende isomeren van deze stof (opgebouwd uit drie groepen van stof A en drie groepen van stof B in de vorm van een achtvlak) kun je bedenken?



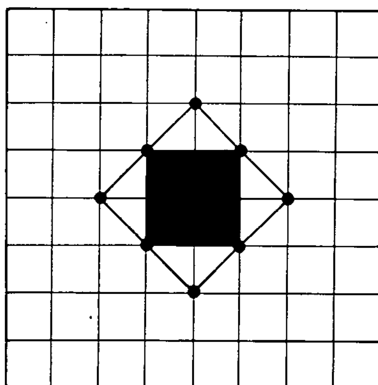
*



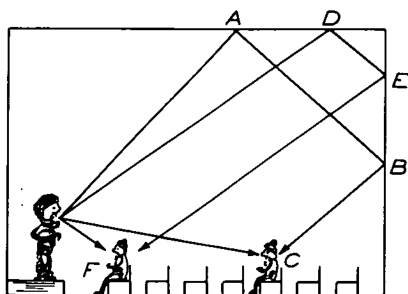
De oliecrisis is ook niet voorbij gegaan aàn deze klas. Op het prikbord schreeuwen de krantekoppen het je tegemoet. Nu gaat het om Saoedia, Koeweit en een aantal andere landen, die ruwe olie aan Nederland leveren. Stel eens dat $\frac{1}{5}$ deel uit Saoedia, en $\frac{3}{10}$ uit Koeweit komt. En nu opeens levert Saoedia 25% minder, evenals Koeweit. De vraag is duidelijk: met hoeveel procent van voorheen moet Nederland het nu doen?

*

Alle kinderen hebben roosterpapier. In voorgaande lessen zijn de eigenschappen daarvan intuïtief verkend. En hoewel je het blaadje op vier verschillende manieren voor je kunt nemen, zonder iets werkelijk aan de situatie te veranderen, levert een verwisseling van links en rechts, of boven en beneden, voor sommige figuren toch een duidelijke verandering op... Nu ligt er een andere vraag: wie kan een vierkant met oppervlakte 8 maken?

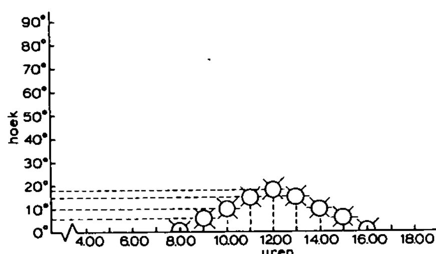


*



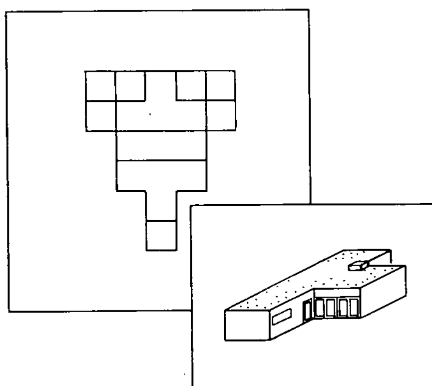
De natuurkundeles ging over de voortplanting van geluid. Via het nadenken over het verschijnsel van de echo kwam de akoestiek van een concertzaal in de aandacht.
Hoe kun je verklaren dat de mijnheer op de eerste rij wel last heeft van een hinderlijke nagalm, terwijl degenen, die enkele rijen achter hem zitten, daarvan geen hinder hebben?

*



Het begrip tijdsverschil (op aarde) leidde tot het nadenken over dag en nacht. De 'baan' van de zon is, vanuit aards standpunt, nader bestudeerd. Dit leverde heel wat meetkundige activiteiten en inzichten. Tenslotte kon men naast het geocentrische model van zon en aarde ook de hoogte van de zon tegen de tijd in een grafiek afzetten. De vraag bij deze grafiek luidt echter: waar (en wanneer) zou men tot deze grafiek zijn gekomen?

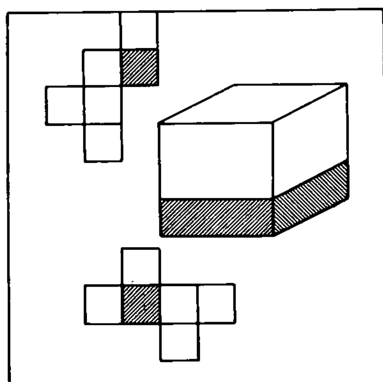
*



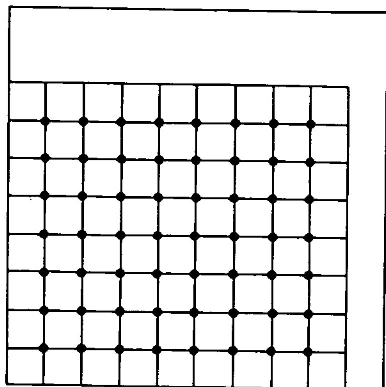
Bouw- en woningtoezicht heeft met het afkeuren van de bungalowplannen de klas ook aan de meetkunde gekregen. Nu is het allemaal zover dat een maquette van het bouwplan gemaakt kan worden. De vraag luidt eerst: kun je van het gegeven bouwplaatje inderdaad een bungalow vouwen? Wie kan dat (laten) zien (en beredeneren) zonder echt te knippen?

*

De kubus is een welbekend uitgangspunt voor meetkunde-onderwijs in de intuïtieve fase. Overigens behoeft men het denkwerk op dit nivo zeker niet te onderschatten. De kinderen ontplooien duidelijke denkactiviteiten bij de hier gestelde vraag: de kubus is voor een deel in de verf gedoopt. Op de bouwplaatjes is het grondvlak reeds geverfd. Hoe moet de rest nog geschilderd worden?



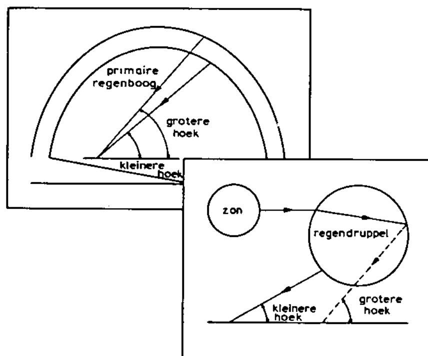
*



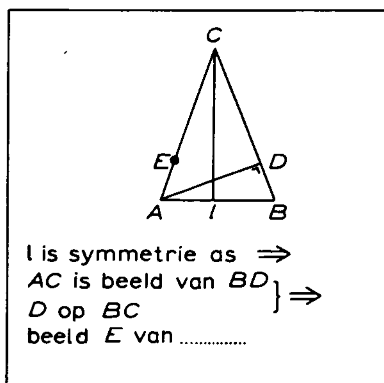
De kinderen in deze (meetkunde-onderwijsleer) situatie worden op een ander nivo aan het denken gezet. Je hebt allerlei rechthoeken op het rooster. Tel het aantal roosterpunten dat binnen de gegeven rechthoek valt. Hoe zit dat bij een rechthoek van 327 bij 731?

*

Meetkunde kan een instrument zijn voor toepassers van de wiskunde. Natuurkundige verschijnselen worden soms via een meetkundige modellering doorzien. Hier wordt de regenboog als verschijnsel verklaard door de breking en terugkaatsing van zonnestralen in regendruppels. Wie is nu in staat om het optreden van een dubbele regenboog te verklaren?

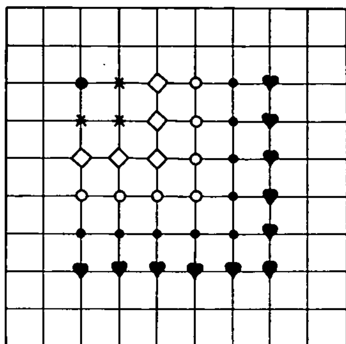


*



Meetkunde-onderwijs is voor ons, wiskundeleraren, nauw verbonden aan de deductieve methode. Laten we de globale deductieve aanpak (axiomatiek) weg, dan blijft ons voldoende stof voor lokale deducties. Uitgaande van de eigenschappen van een lijnspiegeling en die van de gelijkbenige driehoek, kun je bewijzen, dat de hoogtelijnen uit de basishoeken gelijk zijn. Wie is in staat om dit bewijs 'correct' op te schrijven?

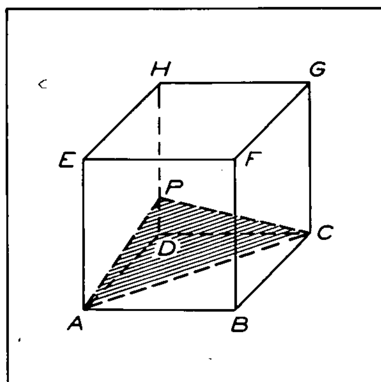
*



$1+3=4$ de som van twee oneven getallen; $1+3+5=9$ de som van de eerste drie ... $1+3+5+7=16$ de som van .... Dus: de som van de eerste n oneven getallen is n^2.
De kinderen hebben deze 'bewering' mee naar huis gekregen, om eens over na te denken. Nu is er iemand op de gedachte gekomen om dit plaatje te tekenen. 'Wat kunnen we daarmee doen?', is de gestelde vraag.

*

Aan diverse modellen van de kubus zijn allerlei meetactiviteiten ontwikkeld. Het moet nu mogelijk zijn dergelijke werkzaamheden ook aan het (tweedimensionale) plaatje te doen. De intuïtieve inleiding van de meetkunde in deze klas liet weinig ruimte voor het ontstaan van een behoefte aan exactheid. Nu ligt hier de vraag: is driehoek APC gelijkbenig?



1 *Meetkunde-onderwijs in ruime zin*

In de op dit jubileumnummer voorbereidende artikelen over het meetkunde-onderwijs van de afgelopen 50 jaar[1] is duidelijk naar voren gekomen op welke punten de discussie zich richtte. Zoals dat meestal gaat, begon men met kritiek op het vigerende meetkundeprogramma of de gebezigde methode. Soms kwam de discussie niet verder dan de bekende leerstof (logische opeenvolging, vanzelfsprekende waarheden, spooktuin van de abstractie, de plaats van de definities, noteren van een bewijs, e.d.). Soms ook ging men verder. Filosoferend over de doelstellingen van het vak werden dan de grenzen van de bestaande examenprogramma's ruimschoots overschreden. Mede dank zij het signaleren van nivo's van denken konden zelfs voorstellen geformuleerd worden voor een fundamentele verandering van het meetkunde-onderwijs. Het liep echter anders. Accentverschuivingen binnen de wiskunde zelf (de

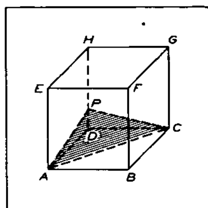
[1] E. de Moor en A. Treffers:
1. Het aanvankelijke meetkunde-onderwijs (1)
2. Het aanvankelijke meetkunde-onderwijs (2)
3. Het aanvankelijke meetkunde-onderwijs (3)

aritmetische en algebraïsche aanpak verkregen de voorkeur) induceerden leerstofveranderingen. Transformaties en vectoren kwamen centraal te staan in de nieuwe leerplans. Het lijkt erop dat de vele verworvenheden, tot uitdrukking gebracht in de discussies over meetkunde-onderwijs, hiermee verloren zijn geraakt. In de bovenstaande momentopnamen van meetkunde-onderwijs (meetkunde-onderwijsleersituaties) blijkt dat de meetkunde in dit jubileumnummer in ruimere zin wordt opgevat. Voor de fantasierijke lezer moet het mogelijk zijn om de tien aspecten[2] van meetkunde-onderwijs erin te herkennen. We noemen ze nogmaals:

- ▷ aanschouwelijk aspect: oriëntatie in de ruimte
- ▷ teken- en constructie-aspect
- ▷ nuttigheidsaspect (toepasbaarheid)
- ▷ logisch aspect
- ▷ structuuraspect
- ▷ algebraïsch aspect
- ▷ reken- en meetaspect
- ▷ taal- en relatie-aspect
- ▷ combinatorisch aspect
- ▷ topologisch aspect

Met een doordenking van deze achtergrond is het mogelijk om de bijdragen in dit nummer als totaliteit te overzien.
In het eerste gedeelte (Over meetkunde) wordt de problematiek in de meest ruime zin benaderd. De auteurs hebben zich geen beperkingen opgelegd door bestaande programma's of exameneisen. Hetgeen naar voren gebracht wordt kan op dit moment tot steun zijn bij het nadenken over de totaliteit van het bestaande meetkunde-onderwijs en eventueel aan te zetten verbeteringspogingen. In het tweede deel (Meetkunde voor het onderwijs) hebben de auteurs, weliswaar denkend vanuit de school van vandaag, zich ook niet laten afremmen. Hun ideeën en suggesties zijn bedoeld als verrijkingsmateriaal voor uw meetkundelessen van morgen. Het hoe, waar en waarom van het leggen van de accenten in uw onderwijs, kan wellicht mede bepaald worden door de artikelen in het eerste deel.
Tenslotte hebben de auteurs van het derde deel zich, door de vraagstelling van de redactie gedwongen, moeten beperken tot een meer enge opvatting van meetkunde-onderwijs. Aspecten van de meetkunde anno 1974 worden naar voren gebracht en, op sommige plaatsen, aan een analyse onderworpen.
Voor een kort overzicht van de 13 bijdragen willen we bij deze enge benadering, achteraan dus, aanvangen.

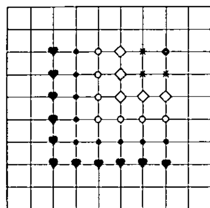
[2] E. de Moor en A. Treffers:
Het aanvankelijke meetkunde-onderwijs (3)



Sanders: Meetkunde en meetkunde-onderwijs bij het mavo.

Op de mavo bestaat het meetkunde-onderwijs uit het bestuderen van driehoeken, vierhoeken en cirkels. De stelling van Pythagoras biedt de mogelijkheid tot het maken van berekeningen, evenals het gebruik van formules voor omtrek en oppervlakte. Het grootste deel van de andere activiteiten (transformaties, vectoren, trigonometrie en stereometrie) worden niet ervaren als meetkunde. Deze arithmetische aanpak kan, bij een sterke gerichtheid op het examen, snel leiden tot het aanleren van een soort algoritmisch gedrag. Op deze wijze kan, vanuit de wiskunde gezien, een foutieve attitude ontwikkeld worden. Dat dit feitelijk ook al het geval is, signaleert Sanders in een vergelijking van havo-3 en mavo-4 leerlingen, die weliswaar hetzelfde programma hebben, maar essentieel verschillend onderwijs ontvangen. Zo leidt het feit, dat 'bewijzen' taboe zijn in de mavo wiskunde, tot een vermindering van de behoefte aan exactheid. Binnen dit toch wel zinvolle programma zou de auteur liever meer accent willen leggen op de meetkunde van de ruimte. De vectoren kunnen, wat hem betreft, uit het programma weggelaten worden.

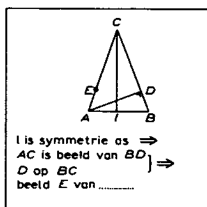
*



'Bewijzen is taboe', zegt Sanders in zijn bijdrage. Over het bewijzen en het leren daarvan vertelt drs. J. van Dormolen (12. Over het leren wat een bewijs is). In navolging van Van Hiele onderscheidt hij drie nivo's waarop dit bewijzen bij leerlingen kan plaatsvinden. Hiermee benadert hij vooral het psychologisch-emotionele aspekt van deze problematiek. De kracht van een bewijs (en de behoefte eraan) hangt nauw samen met het nivo, waarop het denken bij het kind plaatsvindt. Daarmee moet men in het wiskunde-onderwijs rekening houden. In de traditionele opvatting van het meetkunde-onderwijs werden vele leerlingen gedwongen kunstmatig op een te hoog nivo wiskunde te bedrijven. In de huidige benadering van wiskunde-onderwijs, een overdreven reaktie op het oude, laten we veelal leerlingen, die beter kunnen, te lang op een te laag nivo opereren.

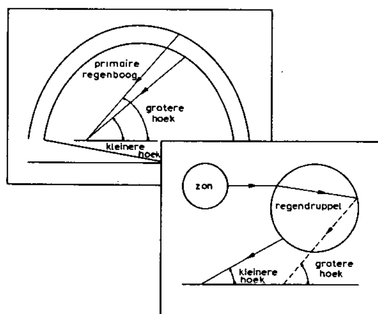
De oplossing van dit soort problemen is niet te vinden in het aanbrengen van telkens weer een andere systematiek van de wiskunde zelf. We zullen moeten nadenken over de systematiek in het onderwijs van de wiskunde.

*



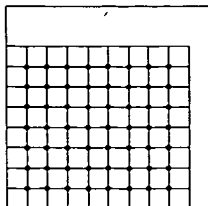
Een analyse van deductie en bewijzen m.b.t. het V.W.O. geeft Dr. P. Vredenduin ('Is het deductieve element in het meetkunde-onderwijs bij het V.W.O. verdwenen?') Naar aanleiding van deze veel gehoorde klacht stelt de auteur zich de vraag *wat* eigenlijk verdwenen is. Tenslotte zou wiskunde-onderwijs zonder een deductief element geen echt wiskunde-onderwijs zijn. In een tweetal voorbeelden uit het oude meetkunde-onderwijs (planimetrie en stereometrie) laat hij zien dat 'toen' deductie bestond uit het opschrijven van een bewijs in de vorm van een graf van een partieel geordende verzameling uitspraken. Een welbewuste training om dit te leren is in elk geval uit het wiskunde-onderwijs bij het V.W.O. verdwenen. Wat er nog wel aan (lokaal) deduceren wordt gedaan, licht hij eveneens toe aan twee voorbeelden (transformaties en vectoren). De konklusie kan luiden: er wordt nog wel aardig geredeneerd in het wiskunde-onderwijs van nu. Het leren redeneren gaat evenwel geleidelijker, niet elke stap behoeft expliciet vermeld te worden, we maken er geen hoofdstuk en geen drama meer van. Na de opmerking, dat een andere opvatting van de meetkunde (als lineaire ruimte met inprodukt) ook de accenten in het onderwijs heeft verlegd, spreekt hij zijn voldoening uit over het feit dat we, ook wat betreft de stereometrie in klas 4, verlost zijn van het oude deductieve element.

*



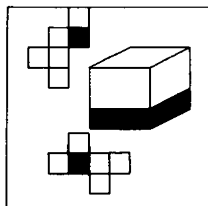
Aan dit aspect van meetkunde-onderwijs, de ontwikkeling van het *logisch denken* (= achting hebben voor deductie en acht slaan op de beperking van de inductieve werkwijze), voegt Dr. W. van der Meiden een tweede toe: het verkrijgen van *ruimtelijk inzicht*. (10. De betekenis van de meetkunde bij het V.W.O. voor het verder studeren). Ruimtelijk inzicht kan worden aangewend om verschijnselen mechanistisch (= in wiskundige termen van plaats en beweging) te verklaren. Beide genoemde elementen hebben de toepassers van de meetkunde ervan weerhouden om de stationaire toestand, waarin het wiskunde-onderwijs jarenlang verkeerde, te bekritiseren. Vooral vanuit de hoek van deze toepassers ziet hij mogelijkheden voor goed meetkunde-onderwijs binnen het huidige programma (de natuurwetenschappelijke methode en toepassingen in de techniek met betrekking tot de exploratie van gedachtengangen en een ruimtelijk inzicht als basis voor de lineaire algebra). Met bezorgdheid konstateert hij evenwel een andere interpretatie van de programma's in de huidige school. De tweezijdigheid (tweeslachtigheid) van het begrip 'bruikbare meetkunde' (gericht op de voorbereiding van een exacte studie of op eindonderwijs) zal het toekomstige onderwijs blijvend frustreren.

*



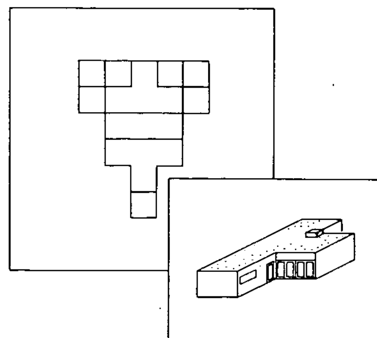
Ook met 'Een paar meetkundelessen' van Drs. A. J. Th. Maassen staan we nog met beide benen in de onderwijspraktijk van dit moment. Zowel de wijze van beschrijving (in termen van leerstof, leerlingenactiviteiten, reacties van leerlingen, didactische werkvormen en didactische overwegingen) als de inhoud van de lessen laten evenwel zien dat een ruimere opvatting over meetkunde (en wiskunde) leren op de achtergrond meespeelt. De aangeboden problemen geven reliëf aan de overweging dat in het meetkundeonderwijs geen vanzelfsprekende zaken moeten worden afgeleid, maar dat juist verrassende verschijnselen kunnen motiveren tot een willen begrijpen. Zo leveren interessante wiskundige fenomenen een instap voor alle kinderen op laag nivo. De wiskundige taal wordt ontwikkeld, het generaliseren beoefend en zelfs komt een stukje axiomatiek in beeld. Aan de vraagstukken voor allen wordt een aantal toegevoegd voor liefhebbers. Hier leren de (goede) leerlingen zich bewust af te vragen in hoeverre ze kunnen vertrouwen op de eigen waarneming.

*



De opmerking van een brugklaskollega, die juist een stuk meetkunde in zijn leerboek overslaat – door tijdgebrek – is voor Ed de Moor (8. De kubus in de brugklas) aanleiding om een aantal meetkundige activiteiten toe te voegen. Zonder de pretentie volledig te zijn – noch origineel, zoals hij zelf uitdrukt – doet hij 20 suggesties, die dusdanig uitnodigend zijn, dat we ervan overtuigd zijn dat vele lezers van dit tijdschrift er nog veel plezier aan zullen beleven. Hierdoor kan dan tevens duidelijk worden dat het algoritmisch gedrag, waarop door algebraïsering en examendrang vaak te sterk getraind wordt, bij het werken aan dit soort problemen, geen enkel effect heeft. Hier wordt op een essentieel ander aanpakgedrag een beroep gedaan. De auteur zou hier meer tijd aan willen besteden.

*

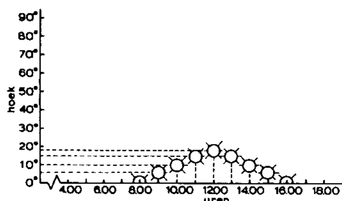


Voor leerlingen met een meer praktisch gerichte belangstelling kan meetkundeonderwijs eveneens bijdragen tot de ontwikkeling. Wim Kremers (wiskunde) ontwikkelde in nauwe samenwerking met zijn vriend John Philips (architect) een projectje: 'vakantiebungalows'. (7. Nog zonder kop of staart.) De titel slaat op het feit dat het over een stukje bureauwerk gaat, dat de toets der praktijk nog niet doorstaan heeft.

De bestektekening van de zomerbungalow Belvia roept allerlei vragen op, die tot meetkundige activiteiten voeren: drie-

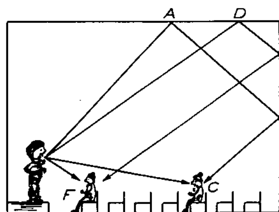
dimensionale interpretatie van een projectie, het maken van een maquette, het gebruiken van het schaalbegrip, het beoordelen van bouwplaatjes, het indelen van beschikbare ruimte en het minimaliseren van benodigde kabellengte. Deze opdrachten kunnen aanleiding zijn tot meetkunde-onderwijs in ruimere zin.
We voegen hier nog iets aan toe: met de keuze van deze, voor de praktisch georiënteerde leerling rijke context, heeft men de kans op gemotiveerd leren in elk geval vergroot.

*



Het bungalowproject was niet uitgeprobeerd in de klas. Leen Streefland beschrijft een deel van het project 'Afstand, tijd en snelheid op aarde' juist vanuit zijn ervaring met een zesde klas basisonderwijs. Daar op de basisschool van nu geen sprake is van meetkunde-onderwijs, betekent dit een geweldige stap buiten het gangbare programma. Dat het binnen het Wiskobasleerplan geen uitzonderlijke rol speelt, zal duidelijk zijn. In het genoemde project wordt meer aan meetkunde gedaan dan hier beschreven wordt. Het gaat 'globaal gesproken' om een verkenning van de (aard)bol, om lokale redeneringen en het beschrijven en doorgronden van de relatie tussen afstand en tijd met betrekking tot een gegeven beweging. Er worden hoeken gemeten, de hoogte van de zon wordt in een hoek (noodzakelijkerwijs) uitgedrukt, het geleerde wordt weer toegepast in het meten van onbereikbare hoogten, de baan van de zon wordt vanuit een geocentrisch standpunt in model gebracht (hiertoe worden de schaduwstanden van een verticale stok bestudeerd), gelijkvormigheid en verhoudingen zijn onderwijl in zicht geweest, het verband van zonnebaan en jaargetijde komt naar voren en de hoogte-tijd grafiek van de zon gedurende een dag levert een wiskundig model, dat in deze klas niet eens met het eerder genoemde verward wordt.
In dit stukje basisonderwijs blijkt de meetkunde een bruikbaar instrument op het nivo van het intuïtief begrijpen. Het ontbreken van de juiste technieken en formulering frustreert de leerling (en zijn onderwijzer) niet. Bewijskracht en overtuigingskracht komen – op rationele wijze – onder leiding van de leerkracht naast elkaar voor.

*

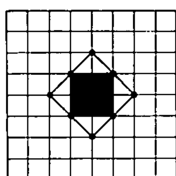


In 5. 'Meetkunde om ons heen' geeft Drs. J. van Lint in de zin van het zojuist genoemde basisschoolproject suggesties voor de verlevendiging van het meetkunde-onderwijs voor oudere leerlingen in een andere beginsituatie. Met professor Minnaert vindt hij in de 'Natuurkunde van het vrije veld' diverse aangrijpingspunten voor meetkunde-onderwijs. Het instrumentele karakter van de meetkunde en het toepasbaarheidsaspect komen duidelijk naar voren:

een studie van nagalm en akoestiek,over moderne navigatie, waarbij hyperbolen als positielijnen van een vaartuig t.o.v. twee zenders de plaatsbepaling tot op enkele meters nauwkeurig, mogelijk maken, en *een meetkundige beschrijving van het fenomeen regenboog*. De auteur noemt zijn suggesties 'uitstapjes' voor docent en leerlingen. Het kon wel eens zijn dat in een nieuwe opvatting (in de ruime zin) van meetkunde-onderwijs deze 'uitstapjes' tot zeer geschikte 'instappen' kunnen promoveren.

*

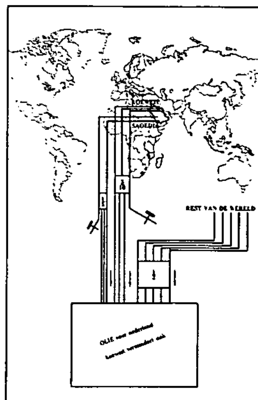
Met deze inspirerende bijdrage van Van Lint zijn we gekomen aan het eerste deel van dit jubileumnummer, waarin meetkunde en meetkunde-onderwijs in de meest ruime zin beschouwd kunnen worden.



Nog binnen de doelstellingen van het huidige meetkundeprogramma (tot en met het V.W.O.) geeft Dr. P. van Hiele (4. De intuïtieve grondslagen van de wiskunde) een psychologische basis aan een intuïtieve fase binnen het wiskundig leerproces. In het eerste contact met de verschijnselen kan een kind een woordenloos oordeel over de situatie hebben. Er kan daarbij sprake zijn van een intuïtief inzicht. Bij het denken over de situatie, een volgende stap in het leerproces, doet zich de behoefte aan symbolen voor (niet noodzakelijk taalsymbolen). In feite is men pas in staat om het denken te constateren, als er een zekere versymbolisering optreedt. Vanaf dit ogenblik is een rationele communicatie mogelijk, een taal wordt ontwikkeld en daarbinnen wellicht een theorie.
De didaktiek dient zich bezig te houden met deze fasering. Elke fase moet in het onderwijsleerproces een kans krijgen. De intuïtieve aanpak begint met het aanbieden van strukturen. Voor de meetkunde kan dit, onder een zekere doelstelling, roosterpapier zijn. Vanuit de intuïtieve kennis van deze struktuur begint de begripsvorming en kan men op een hoger niveau van inzicht komen. Binnen het huidige programma, met de grote nadruk op aritmetisering en vectoren, kunnen er verschillende aspecten van meetkunde in ruimere zin verloren gaan.

*

Met opmerkelijke aandacht voor een intuïtieve basis beschrijft Seymour Schuster (3. On the teaching of geometry. A potpouri) *wat* er allemaal verloren kan raken. Hij noemt eerst de (ons bekende) punten van kritiek op meetkundeprogramma's in de V.S. (axiomatiek, deductie, nuttigheidsaspect alleen in naam). Ook de vernieuwingspogingen, die binnen de oude doelstellingen aangewend werden, faalden in alle opzichten.



Men verzuimde waarde te hechten aan vele andere aspecten:

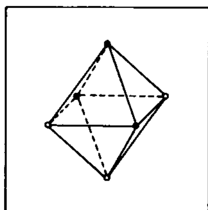
- ▷ de kunst van het mathematiseren (geometriseren),
- ▷ de meetkunde als machtig instrument voor het verkrijgen van inzicht in problemen in andere vakgebieden als mechanica, natuurkunde, thermodynamica, ecologie, functietheorie, biologie,
- ▷ de noodzaak van een studie van de hogere (dan 2e) dimensie èn zaken als
- ▷ combinatorische problemen,
- ▷ transformaties,
- ▷ symmetrie,
- ▷ topologie en
- ▷ 'probleem solving'.

Deze analyse vormt de basis van een alternatieve filosofie van het meetkunde-onderwijs. Hierin komt de ruime benadering expliciet naar voren. Hij ziet dit onderwijs als het aanbieden van een reeks meetkundige ervaringen in nauwe relatie met de natuurwetenschappen. Meetkunde wordt zodoende een instrument om problemen en begrippen uit het andere vakgebied te interpreteren. Deze techniek van het geometriseren dient langzamerhand aan een grote variëteit van voorbeelden ontwikkeld te worden.

Hierbij komt het lokaal deduceren en het generaliseren aan de orde. De meetkunde dient gelegenheid te bieden tot een voortdurende oefening in wiskundige creativiteit. Een voorstel tot de verrijking van het leerplan – op een hoger nivo van wiskundeleren – wordt gedaan vanuit het nadenken over de fundamentele begrippen *invariantie* en *symmetrie*. Het reservoir aan nieuwe ideeën, dat hieruit voortkomt, kan beschouwd worden als bron voor nieuw te ontwikkelen leerplans.

De alternatieve filosofie van Schuster geeft, met zijn suggesties voor leerstof-inhouden, voldoende stof tot nadenken over eventueel toekomstige ontwikkelingen in ons Nederlands onderwijs.

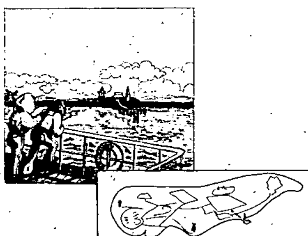
*



In het tweede artikel draagt professor Van der Blij (2. De stereometrie is dood. Leve de meetkunde van de ruimte.) aan deze gedachtenvorming bij. Hij doet dit binnen het gebied van de 'pure' meetkunde, waarbij het echte meten en rekenen niet op de voorgrond worden gesteld. Dagelijks worden we geconfronteerd met meetkundige vormen. Dat we met twee ogen een ruimtelijk beeld van de wereld kunnen opbouwen, is op zichzelf al een boeiend, fysisch en psychisch verschijnsel. Het ontwikkelen van een ruimtelijk inzicht is voor vele vakstudies van belang. Bij het bestuderen van stereoïsomeren in de scheikunde is de behoefte aan dit inzicht o.a. merkbaar. Het gaat om drie dimensionale lichamen, met de bewegingen en spiegelingen, die ze in elkaar over-

voeren. Ook atoommodellen en kristalroosters kunnen onderwerp van meetkundige beschouwingen worden. De windingen op een spoel, de kurketrekkerregel, een schroeflijn op een kegel, de dubbele spiraal van het D.N.A. molecuul, het beoordelen van röntgenfoto's en de geologie geven ook meetkundige instapmogelijkheden.
Dit meetkunde-onderwijs draagt een ander karakter dan het ons welbekende stereometrie-onderwijs. Bovenstaande overwegingen leiden tot enige suggesties voor de vulling van actief-, project-, theoretisch georiënteerd en eenvoudig onderwijs. Professor Van der Blij richt zich hierbij vooral op het algemeen vormend onderwijs (voortgezet onderwijs dus).

*



Professor Freudenthal gaat, gedreven door recente ervaringen met meetkunde in de basisschool, op enkele punten veel verder. 'Is dat meetkunde?' (1) is de vraag, die hij in diverse (onderwijs) leersituaties aan de lezer stelt. De keuze van deze situaties dient begrepen te worden tegen de achtergrond van zijn filosofie: meetkunde als beleving en interpretatie van de ruimte waarin wij leven, ademen en bewegen. Wiskunde-onderwijs betreft dan het mathematiseren van ruimtelijke ervaringen en proefnemingen.
Het meetkundig opvatten en interpreteren van de realiteit vereist een ontwikkelingsproces, dat reeds in de kleuterschool moet worden aangezet. Fundamentele ontwikkelingen zouden vóór het bereiken van de brugklas een kans moeten krijgen. Het feit, dat in deze 'intuïtieve' fase nog geen remming optreedt door het ontbreken van een verbaal apparaat, schept de gelegenheid tot het geven van meetkunde-onderwijs in ruime zin. Hier mogen de kinderen voorlopig reageren met 'ik zie 't zo'. De meetkundige structuur, waarin de 'ik zie 't zo' – oplossing verankerd ligt, bepaalt het inzicht op basis van intuïtie. De taak van de didactiek is nu om het passende materiaal te ontwikkelen, waardoor de kinderen in de gelegenheid worden gesteld 'interne visioenen' naar buiten te condenseren.
Stelt men zich op dit standpunt dan is het mogelijk meetkunde-onderwijs verticaal te plannen, vanaf de kleuterleeftijd. Dit zal dan geschieden in termen, die nauwelijks de ons zo bekende leerstof weerspiegelen. De auteur illustreert zijn gedachten met diverse voorbeelden uit het in ontwikkeling zijnde Wiskobas-programma.

*

Anno 1974, 50 jaar na de oprichting van dit tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde, schijnen nieuwe mogelijkheden voor een verbeterd meetkunde-onderwijs binnen ons bereik te zijn gekomen. Wellicht staan we aan het begin van een fundamenteel nieuwe aanpak van dit gebied.
Moge dit tijdschrift in de komende jaren hiervan een 'getrouwe afbeelding' geven.

Euclides in de twintiger jaren

Dr. Joh. H. WANSINK

Arnhem

1. *Hoe kwam Euclides tot stand?*
   Wat was het karakter van het tijdschrift in de eerste jaren?

De tweede vraag lijkt met behulp van de ter beschikking staande gegevens bevredigend te beantwoorden, de eerste slechts ten dele.

Volgens een mededeling van 'redactie en medewerkers' van het 'Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde' werd op 4 juni 1927 besloten het tijdschrift met ingang van de vierde jaargang te herdopen in 'Euclides, tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken'.
De naam, op voorstel van Schogt tot stand gekomen, was een voorteken voor wat het tijdschrift in de eerste plaats zou gaan nastreven. Er zou allereerst getracht worden te sleutelen aan de traditionele euclidische methode, waartegen weliswaar een groeiend verzet rees, maar die eerst in de tweede helft van de eeuw definitief uit ons schoolonderwijs zou verdwijnen.

Het Bijvoegsel was 'gewijd aan onderwijsbelangen' en stond 'onder leiding van J. H. Schogt en P. Wijdenes'. Ook op de titelpagina van Euclides zouden we de uitdrukking 'onder leiding van' blijven aantreffen en niet 'onder redactie van'. De clausule was weldoordacht gekozen en zinvol. Een redactie is doorgaans verantwoording schuldig aan de een of andere externe instantie, Schogt en Wijdenes zouden hun tijdschrift jaren lang kunnen leiden als 'absolute monarchen', vijfentwintig jaren lang.
In dit tweemanschap domineerde Wijdenes, aan wiens werk Streefkerk in het eerste nummer van de zesentwintigste jaargang terecht een waarderend artikel wijdde onder de titel 'De betekenis van P. Wijdenes voor de didactiek van de wiskunde'. Schogt was enige maanden tevoren uit de leiding weggegleden met een uiterst summier woord van dank 'voor wat hij in ruim 20 jaar voor Euclides heeft gedaan', van de hand van Wijdenes (Euclides 24, p. 139). Deze stak het trouwens nimmer onder stoelen of banken dat de feitelijke leiding aan hem toekwam, dat het tijdschrift zijn geesteskind was.

Met ingang van de zeventiende jaargang werd Euclides officieel orgaan van

Wimecos en Liwenagel, maar ten aanzien van de redactionele verantwoordelijkheid bleef er een zekere ambivalentie bestaan. Eerst met ingang van de 32e jaargang zou Euclides een onafhankelijk tijdschrift worden, waarvan de redactie aan de leden van de beide genoemde verenigingen, en aan deze alleen, verantwoording schuldig zouden zijn.
Tot dat ogenblik had de mogelijkheid de in de leiding van Euclides voor Wimecos en Liwenagel, optredende personen voor het gevoerde redactioneel beleid op normale wijze ter verantwoording te roepen, ontbroken door de invloed die Wijdenes rechtstreeks of indirect in de leiding was blijven innemen. Voor nadere informatie voor de overgang van Euclides naar de nieuwe fase die Euclides in 1956 inging verwijzen we naar het inleidend artikel in het eerste nummer van de 32e jaargang.

Bij hun initiatief van 1924 hebben Schogt en Wijdenes een beroep kunnen doen op medewerkers uit verschillende regionen van ons onderwijs en uit België. Op de titelpagina's van de jaargangen 1–3 treffen we de volgende namen aan: dr. H. J. E. Beth, dr. E. J. Dijksterhuis, dr. B. P. Haalmeyer, dr. D. J. E. Schrek, dr. P. de Vaere en dr. D. P. A. Verrijp.
Op de titelpagina's van de jaargangen 4–16 worden geen namen van medewerkers meer vermeld. Wel weer vanaf de 17e jaargang. Hun aantal zal nu aangroeien tot achttien.
De aard van de in feite verleende medewerking is niet overal duidelijk. Van een zestal medewerkers die op de titelpagina's vermeld werden, zou nimmer een artikel in Euclides verschijnen.

2. *De situatie in het begin van de twintiger jaren.*

In een waarderend artikel dat Bottema in het 'Gedenkboek van de Rijks Hogere Burgerschool te Groningen, 1864–1964' wijdde aan Jensema, oud-directeur van de Rijkshogereburgerschool te Groningen die in de jaren van zijn inspectoraat (1920–1934) grote invloed kon uitoefenen op de maatregelen die er ten aanzien van het middelbaar onderwijs moesten worden getroffen, lezen we:

> 'De jaren twintig kenmerkten zich op onderwijsgebied door nieuwe denkbeelden, onvrede, kritische bezinning op het bestaande, onzekerheid en twijfel aangaande veel of alles: het toelatingsexamen, de waarde van wiskunde-onderwijs, het klassikale systeem, de structuur van een middelbare school'.

Geen wonder dat de hier aangesneden problematiek vóór de verschijning van Wijdenes' Bijvoegsel gewijd aan onderwijsbelangen ook reeds tal van pennen van wiskunde-docenten in beweging had gebracht. Deze vonden voor hun pennevruchten allereerst onderdak in Vaes' Wiskundig Tijdschrift, in het Weekblad voor Leraren, in Paedagogische Studiën en in losse brochures.
Op didactisch gebied konden tot 1921 auteurs terecht in het genoemde Wiskundig Tijdschrift, dat vanaf zijn eerste jaargang open had gestaan voor pedagogische bijdragen. In de vijftiende jaargang troffen we een adres aan

van de heren Jensema, Coelingh en Helwig, uitgebracht aan het Hoofdbestuur van de Vereniging van Leraren bij het Middelbaar Onderwijs, over leerstofbeperking op de h.b.s. Latere jaargangen bevatten een groot aantal artikelen over onderwijsproblemen, o.a. van de hand van: Naber, Van den Heuvel Rijnders, Kok, Vaes, Kempe, Thijsen, Cikot en Kruijtbosch.
Lezing van Vaes' artikel uit de veertiende jaargang over 'De vroegere poging tot invoering van de differentiaalrekening op h.b.s. en gymnasium' is ook nu nog de moeite waard.
Groot is het aantal mededelingen en beschouwingen over wiskunde die werden opgenomen in het Weekblad voor Leraren. Vanaf de oprichting van de groep Liwenagel van het Genootschap van Leraren aan Nederlandse Gymnasia in 1921 vinden we hier alle belangrijke verslagen. Het frappeert ons, dat ook na de oprichting in 1924 van 'Euclides' de verslagen van Liwenagel bleven verschijnen in het Weekblad en niet werden opgenomen in Euclides, waar ze toch allereerst thuis hoorden. En dat terwijl de voorzitter van Liwenagel, Verrijp, nog wel tot de vaste medewerkers van Euclides, althans van het Bijvoegsel, had behoord. Op de titelpagina van de definitieve Euclides zouden de medewerkers eerst worden vermeld met ingang van de 17e jaargang, toen Euclides officieel orgaan van Wimecos en Liwenagel werd en namens beide organisaties medewerking werd verleend. De achtergronden van de communicatiestoornis die hier in het spel geweest moet zijn, zijn mij onbekend.
Tot de belangrijke bijdragen in het Weekblad behoren ook de verslagen van de opvolgende Algemene Bijeenkomsten van Wiskundeleraren, door Liwenagel in de jaren 1926 – 1931 georganiseerd.
In de twintiger jaren gingen er in de kringen van Liwenagel af en toe stemmen op om te komen tot één grote lerarenorganisatie, de docenten van gymnasium èn h.b.s. omvattende. Zo'n algemene organisatie zou echter aan het bestaan van Liwenagel als Groep van het Genootschap geen einde hebben kunnen maken, terwijl in de Groep geen docenten die alleen aan de h.b.s. werkten toegelaten zouden kunnen worden.

Tot de onderwerpen die door een en ander geen plaats zouden vinden in Euclides behoort o.a. de belangrijke voordracht over 'Het Meraner Leerplan, zijn Geschiedenis en zijn invloed op het Duitse Wiskunde-onderwijs' door Schrek gehouden op de Tweede Algemene Bijeenkomst van Wiskundeleraren te Utrecht (1927). Ook Schrek had drie jaar lang tot Wijdenes' vaste medewerkers behoord.
De hier geschetste stand van zaken leidde ertoe dat de informatie die van het tijdschrift op het gebied van het onderwijs in de wiskunde verwacht mocht worden, duidelijke lacunes vertoonde. Over de opvattingen van Klein en de repercussies die zijn Erlanger Programma voor ons wiskunde-onderwijs zou kunnen hebben, werden de lezers in Euclides niet ingelicht. In 1926 hield Van Os op de Eerste Algemene Bijeenkomst van Wiskundeleraren een lezing over meetkundige transformaties, waarvan de leraren alleen via hun Weekblad iets te horen kregen.

Ook het Maandblad voor Onderwijs en Opvoeding 'Paedagogische Studiën'

bevatte in de twintiger jaren tal van bijdragen over het wiskunde-onderwijs, o.a. van de hand van Schrek, Van der Harst, Kruijtbosch en De Groot. Belangrijk was voorts een geruchtmakend artikel van Dijksterhuis 'Over het onderwijs' in de Gids van 1925. Maar toen was 'Euclides' in zijn 'Bijvoegsel'-gedaante reeds geboren!
Van een opsomming van titels van brochures die in deze jaren verschenen over onderwerpen die de didaktiek van de wiskunde betroffen zien we af.
Uit het voorgaande moge echter voldoende duidelijk zijn geworden dat Wijdenes en zijn uitgever Noordhoff redenen hadden om aan te nemen dat er een bevredigende belangstelling mocht worden verwacht voor het didactisch tijdschrift dat ze gingen uitgeven.

Zonder tot een opsomming over te gaan, bijvoorbeeld van zelfstandige brochures, moge het duidelijk zijn dat Wijdenes met zijn uitgever Noordhoff op een bevredigende belangstelling mocht rekenen voor wat ze met hun didactisch tijdschrift beoogden.
Eén brochure uit de twintiger jaren willen we hier toch niet onvermeld laten. In 1927 schreef inspecteur Jensema 'Het middelbaar onderwijs en de critiek die daarop uitgeoefend wordt'. De lezer leert er de liefde van de auteur voor het middelbaar onderwijs van zijn dagen duidelijk uit kennen, evenals zijn conservatisme ten aanzien van de in die dagen voorgestelde hervormingen. Met name bestrijdt Jensema de opvattingen van de hoogleraren Langelaan, Révèsz, Casimir, Kohnstamm en Gunning. Hij vertolkte op eigen wijze bezwaren die destijds in brede kringen van ons onderwijs tegen de hervormingen die voorgesteld waren werden gevoeld.
Het eerste verzet van Jensema tegen vernieuwingen in het wiskundeprogramma was reeds van veel oudere datum. In 1908 was hij opgetreden tegen pogingen van Vaes en anderen om naar Duits voorbeeld hier te komen tot invoering van de infinitesimaalrekening, samen o.a. met Tiddens die later de eerste voorzitter van Wimecos zou worden. Van de laatste weten we echter dat hij met de bedoelde vernieuwing toch is meegegaan: in 1931, nog onder Tiddens' voorzitterschap, zou Wimecos zich met algemene stemmen uitspreken voor de invoering van dit stuk nieuwe wiskunde.
Jensema bleef consequent bij zijn afwijzing van de infinitesimaalrekening. Eerst na zijn aftreden als inspecteur zou de differentiaal- en integraalrekening ook op het h.b.s.-programma een plaats krijgen (1937). Om misverstand te weren delen we hier echter mee, dat de commissie Beth-Dijksterhuis die onder Jensema's inspectoraat de invoering van deze leerstof had aanbevolen, niet op voorstel van Jensema tot stand was gekomen. Het initiatief ertoe was uitgegaan van zijn collega, de niet-wiskundige Bolkestein. Ook bij de invoering van de infinitesimaalrekening in het gymnasiale leerplan (1922) speelde de belangstelling en de vernieuwingsdrang van een niet-wiskundige een rol, namelijk van inspecteur Vinkesteyn, een classicus, die deel had uitgemaakt van de eerste Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde!
Voorts merken we nog op dat Wijdenes' 'Bijvoegsel' in zekere zin een voorganger heeft gehad. Op 1 januari 1917 verkocht de firma Blom en Olivierse zonder 'inspraak' met de redacteuren van de 'Vriend der Wiskunde' dit tijd-

schrift aan Noordhoff, waardoor de uitgave ervan in de loop van de 31e jaargang zou worden afgebroken. De redacteuren Van Breen en De Laive traden daarna op als redacteuren van het 'Wiskundig Bijblad van de Vacature', uitgegeven door Thieme. Dit Bijblad had echter maar in geringe mate belangstelling voor de problemen van de didactiek en streefde er in de eerste plaats naar de functie van 'De Vriend' over te nemen. Dit Bijblad kon daarna niet in de schaduw staan van Wijdenes' latere 'Bijvoegsel'.
Wijdenes kende de marktsituatie voldoende om de uitgave van een nieuw tijdschrift, op zichzelf uiteraard een waagstuk, verantwoord te achten.
De tekorten die we meenden te kunnen aanwijzen hangen m.i. duidelijk samen met het feit dat Euclides geen verenigingsorgaan was, maar dat in laatste instantie één of twee personen, Wijdenes alleen dan wel Wijdenes met Schogt over de inhoud hadden te beslissen.

3. *Wat bood Euclides ons nu in de twintiger jaren?*

In onderstaande tabel hebben we de inhoud van de jaargangen I–V over enige rubrieken verdeeld en daarbij aangegeven hoeveel bladzijden er telkens door die onderdelen in beslag werden genomen.

		I	II	III	IV	V	Σ
1.	verenigingsleven	2	–	1	–	1	4 (0,3%)
2.	leerplan en eindexamen	6	33	78	18	–	135 (11,5%)
3.	leraarsopleiding	–	27	–	17	–	44 (3,8%)
4.	onderwijs in buitenland	17	–	–	–	26	43 (3,7%)
5.	geschiedkundige bijdragen	58	6	15	74	68	221 (18,9%)
6.	mech., nat.kunde, cosmogr.	–	25–	4	13	84	126 (10,8%)
7.	ingekomen boeken	–	–	–	1	2	3 (0,3%)
8.	recensies	34	28	27	31	25	145 (12,4%)
9.	gonio- en trigonometrie	–	–	–	–	3	3 (0,3%)
10.	meetkunde	17	4	33	53	–	107 (9,1%)
11.	rekenen en algebra	–	12	32	41	–	85 (7,3%)
12.	algemene onderwerpen	60	44	17	29	86	236 (20,2%)
13.	oraties	18	–	–	–	–	18 (1,5%)
	totale omvang	212	179	207	277	295	1170 (100%)

We geven op de getallen in deze tabel enig commentaar.

a Officiële mededelingen en berichten uit de verenigingen van wiskundedocenten ontbreken zo goed als geheel. De vier bladzijden die opgenomen werden betroffen het bericht van de naamsverandering van het tijdschrift in 'Euclides' en een mededeling van een ingestelde nomenclatuurcommissie, die echter daarna niets meer van zich heeft laten horen, benevens eenmaal iets uit het verslag van het Staatsexamen. Duidelijk wordt door deze rubriek gemanifesteerd, dat Euclides geen verenigingsorgaan was en dat Wijdenes

geen termen aanwezig heeft geacht om eigener beweging berichten uit het verenigingsleven in zijn tijdschrift tot hun recht te laten komen.

b Over leerplan en eindexamen kon evenals over de leraarsopleiding betrekkelijk veel worden opgenomen. Dit staat in verband met de publicatie van het rapport van de leerplancommissie Beth-Dijksterhuis, anders gezegd met de A-B-C-D-commissie, om alle vier leden van de commissie (Van Andel, Beth, Cramer, Dijksterhuis) in de afkorting tot hun recht te laten komen. Het rapport bracht veel pennen in beweging, waarvan we in het tijdschrift de neerslag vinden.

c Het onderwijs in het buitenland heeft te weinig en onvoldoende diepgaand de aandacht van de lezers gekregen. Alleen België en Duitsland kwamen aan de orde, maar wat het laatste land betreft is het teleurstellend dat de Klein'se Reform niet ter discussie is gesteld en dat Schrek's artikel over het Meraner Leerplan elders werd geplaatst.

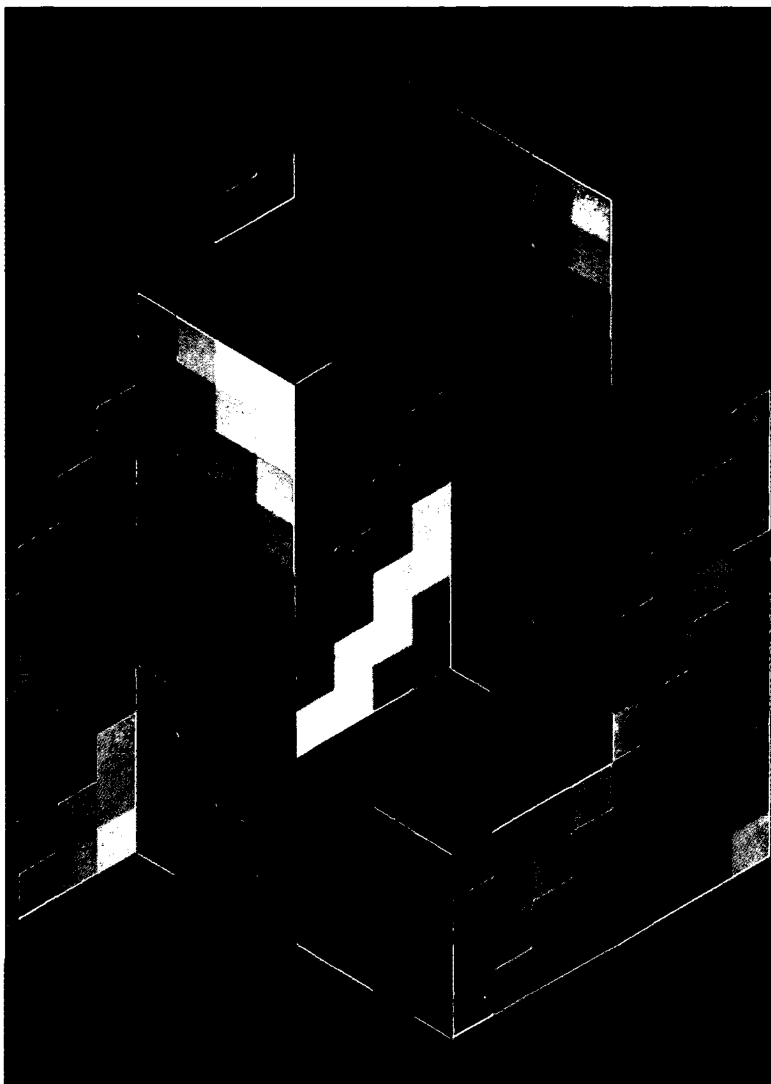
d Uit het hoge percentage bladruimte ingenomen door bijdragen van historische aard krijgt men de indruk dat dit aspect enigszins over-geaccentueerd is. Dit hangt ongetwijfeld samen met de persoonlijke belangstelling van Dijksterhuis die aan de geschiedenis van het vak voor de leraarsopleiding maar ook voor een deel van de leerlingen grotere betekenis toekende dan anderen dat deden. Voorts hadden we in de leraarsgelederen Schrek's markante persoonlijkheid. Deze wist uit de geschiedenis van het vak impulsen te halen die ook voor de onderwijspraktijk hun betekenis hadden.
Het is te betreuren, dat Schrek nog te vaak voor waardevolle beschouwingen elders plaatsruimte heeft moeten zoeken.

e Van de 'exacte' vakken, aan de didaktiek waarvan in Euclides aandacht zou worden besteed, is de mechanica het beste aan zijn trekken gekomen. Dit hangt samen met de strijd die er in de gelederen van de docenten werd gestreden tussen hen die een axiomatische aanpak voorstonden en hen die het vak experimenteel wensten te doen behandelen. De strijd laaide op, toen de Nederlandse Natuurkundige Vereniging voorstelde de mechanica als afzonderlijk leervak te schrappen en het bij de natuurkunde onder te brengen. In Euclides werd gewaagd van een 'aanslag op de mechanica' en velen stelden zich teweer. Dit komt in de kolommen van Euclides tot uitdrukking.
Van Dantzig's bijdrage 'Woord en werktuig', naar aanleiding van deze strijd geschreven, werd in Euclides opgenomen en is ook nu nog bestudering waard.

f Aan de verschijning van nieuwe schoolboeken werd te weinig aandacht besteed. Zie naar de rubriek 'ingekomen boeken'. Van leerboeken voor wiskunde die boven het v.h.m.o.-niveau uitstaken werden dikwijls doorwrochte recensies geschreven. Toch rees hier een probleem, zoals uit het niet gelukkig gestelde stukje 'Ons standpunt inzake de beoordeling van schoolboeken' van de hand van Schogt en Wijdenes blijkt. Tegen hun mededeling, dat ze het dringend noodzakelijk achten, dat er op goede schoolboeken moet worden

gelet en dat het volle licht dient te vallen op minderwaardige werken, kon men van onderwijskundig standpunt moeilijk bezwaren inbrengen. Aanstoot moest echter de volgende tirade geven: 'Dat wij meestal werken van de firma Noordhoff zullen aanbevelen vindt zijn oorzaak in het feit, dat op zeer enkele uitzonderingen na, alle in Nederland verschenen wiskundige werken door deze firma zijn uitgegeven'. Deze uitlating moest los van het waarheidsgehalte bij velen kwaad bloed zetten.

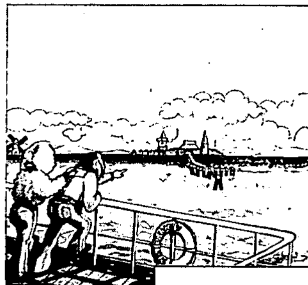
g De rubriek 'oraties' is hier alleen opgenomen in verband met het feit dat in latere jaren aan de leiding het verwijt gemaakt zou kunnen worden de kolommen van Euclides te gemakkelijk met oraties te vullen waarvan de didactische betekenis twijfelachtig was.
Gezamenlijk nemen de rubrieken 8–12 een behoorlijk deel van de beschikbare ruimte in beslag, iets wat men van een aan de didactiek van de wiskunde gewijd tijdschrift eigenlijk ook niet anders zou mogen verwachten. Van een voor de hand liggende onderscheiding in wetenschappelijk georiënteerde bijdragen en specifiek didactische hebben we moeten afzien. Een algemeen bezwaar tegen de inhoud van Euclides gedurende de eerste decennia van zijn bestaan is het feit dat wezenlijk didactische problematiek te weinig wordt aangesneden. Na de polemiek tussen Dijksterhuis en mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa waarmee de eerste jaargang opende zijn de meningen van hen die meer of minder aan de kant van de laatste stonden te weinig in Euclides naar voren gekomen. Men krijgt de indruk dat de leiding van Euclides de controverse met de genoemde polemiek als afgedaan beschouwde. Het tekort in Euclides dat op deze wijze ontstond zou eerst in de dertiger jaren worden aangevuld door de activiteiten van de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O., de Werkgroep voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs, die in 1936 als Nederlandse afdeling van de New Education Fellowship werd gesticht.

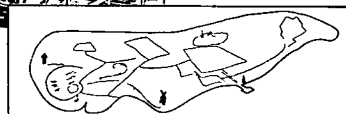


Over meetkunde

1. Prof. Dr. H. Freudenthal: *Wat is meetkunde?*
2. Prof. Dr. F. v. d. Blij: *De stereometrie is dood. Leve de meetkunde van de ruimte.*
3. S. Schuster: *On the teaching of geometry. A potpouri.*
4. Dr. P. van Hiele: *De intuïtieve grondslagen van de wiskunde.*

Wat is meetkunde?





Prof. Dr. H. FREUDENTHAL

Utrecht

Met het traditionele meetkunde-onderwijs heb ik me enkele jaren geleden op een internationale conferentie in Carbondale (Illinois, USA) en later in een boek bezig gehouden. Tegen twee stromingen meende ik toen op te moeten roeien: tegen de neiging in de meetkunde een goede gelegenheid te zien om aan te tonen dat men met lineaire algebra iets kon beginnen, en tegen de mening dat men de meetkunde zou moeten en kunnen 'redden' door meetkunde-onderwijs te vervangen door onderwijs in de grondslagen der meetkunde – nog op een internationale conferentie in Bielefeld in september 1974 was het deze groep die de toon aangaf. Daartegenover plaatste ik mijn filosofie: meetkunde als beleving en interpretatie van de ruimte waarin we leven, ademen en ons bewegen. Want dit strookte met mijn filosofie van het wiskunde-onderwijs in 't algemeen: de mathematisering van ruimtelijke ervaringen en proefnemingen als voorbeeld van mathematisering zonder meer.
Toen ik mijn boek schreef, was mijn blik van deze basis uit naar boven gericht. Ik bedoel: ik stelde me een meetkunde-onderwijs voor, dat met de brugklas van het voortgezet onderwijs begint, zich naar gelang van de gaven van de leerling korter of langer of misschien gedurig op het nulde niveau beweegt, dat tot lokaal en misschien zelfs globaal ordenen voortschrijdt en in een invoeging van de meetkunde in een systeem der wiskunde zou kunnen culmineren.
Ik trek hiervan niets in. Wel heb ik er essentieels aan toe te voegen, in eerste instantie namelijk een verandering van blikrichting. Ik heb niet iets ontdekt, dat voor mij een nieuwe wereld zou zijn, maar heb van iets de betekenis en de relevantie begrepen, die groter blijkt te zijn dan mij toen duidelijk was. De betekenis van de meetkunde voor de basisschool is me in een mate duidelijk geworden, dat ik nu durf stellen dat er zonder meetkunde op de basisschool voor velen ook geen meetkunde in het voortgezet onderwijs bestaat. Deze ontdekking heb ik aan de kinderen op basisschool- en kleuterschoolleeftijd te danken, met wie ik heb gewerkt. Het waren slechts weinig, maar dan beslissende waarnemingen, die me de weg wezen – de weg naar het begrip dat we iets missen, een onherroepelijke gelegenheid voorbij laten gaan, indien we kinderen op basisschoolleeftijd niet in de meetkunde inleiden. In het werk van het IOWO voor de basisschool heb ik van begin af aan voor meetkunde

gepleit. Het aarzelende antwoord hierop was begrijpelijk. Kon men bij alle andere lasten ook nog die van de meetkunde op zich nemen? Goede bedoelingen alleen zijn niet overtuigend genoeg om voorstellen aannemelijk te maken. De meetkunde werd dus in eerste instantie uitgesteld, maar niet om een afstel voor te bereiden. Zij moest 1974/75, in de even leerjaren (2e, 4e, 6e) aan de beurt komen, nà de oneven jaren (1e, 3e, 5e), voor wie in 1973/74 een leerplan was ontwikkeld. Met de systematische ontplooiing van de meetkunde op de basisschool hebben we op dit ogenblik dus nog maar beperkte ervaringen opgedaan, maar desniettemin zijn allerlei benaderingen beproefd: echte meetkunde in het gedachte-experiment, in kleine groepen en met individuele leerlingen. Daarnaast is er echter in ons ontwerp voor het 1e, 3e, 5e leerjaar veel wat men hoe meer men zich erin verdiept, met des te sterkere overtuiging meetkunde zou noemen, en hierop ga ik allereerst in.

Ja, wat is meetkunde? Ik denk dat ik vaak en overtuigend genoeg heb uitgelegd dat en waarom meetkunde niet pas met het formuleren van definities en stellingen begint: het ordenen van ruimtelijke ervaringen dat tot deze definities en stellingen leidt, is ook al meetkunde. Ik ga nu echter verder terug: naar de ontwikkelingsfase waar het meetkundig opvatten en interpreteren van de realiteit nog niet door een verbaal apparaat van begrippen en het technisch manipuleren ervan wordt gesteund, waar het meetkundige nog gelijkgerechtigd naast het verbale staat of het zelfs in efficiëntie overtreft.
Sinds ik kinderen observeer – het is met mijn eigen kinderen begonnen – werd ik steeds weer getroffen door de overtuiging waarmee zij intuïtieve oplossingen van mathematische problemen verdedigden. Hadden ze een probleem opgelost en vroeg men ze 'waarom?', dan haalden ze de schouders op en zeïden 'ik zie het zo'.
Dit 'Ik zie het zo' was eigenlijk een mooie titel voor dit opstel geweest; in een nieuw boek plaats ik deze woorden boven een stuk over het meetkunde-onderwijs. Meetkunde op basisschoolleeftijd is hetgeen in termen van het gedrag van de leerling door de reactie 'ik zie het zo' op de vraag 'waarom' kan worden gekarakteriseerd. In mijn eerder genoemd boek heb ik meetkunde daar laten beginnen waar men zich inspant, zich dient in te spannen, om van de lerende een ander antwoord te verkrijgen dan dat hij zich op zijn interne visuele ervaring beroept. Dat ik de meetkunde daar liet beginnen, betekent geenszins dat ik dit soort antwoorden toen niet serieus zou hebben genomen. Als het kind verklaart, dat het iets *zo* ziet, dient men dit getuigenis onbezien te aanvaarden. Ik heb het vele malen beleefd dat het kind op basisschoolleeftijd dingen ziet, die volwassenen niet zien, op een rechtstreekse wijze zoals wij niet kennen. Het komt me voor dat deze gave – het is zeker een gave – omtrent de leeftijd van 11–12 jaar verloren gaat of verzwakt of verdrongen wordt door de ontwikkeling van verbale bekwaamheden.
Het antwoord 'ik zie het zo' van kinderen op basis- of kleuterschoolleeftijd aanvaarden betekent niet, dat men ermee genoegen moet nemen. Ik ben er in de laatste jaren achter gekomen, hoe men de kinderen soms hun interne visioenen als het ware naar buiten kan laten kondenseren. Een van deze kondensatiekernen bestaat hierin, dat als men een groep onderwijst, men

het kind dat 'het zo ziet' vraagt, het de anderen, die het niet zien, uit te leggen – in de wending van ondervraagde tot onderwijzende kan het kind zich adekwate uitdrukkingsmiddelen verwerven. Een andere kondensatiekern is die dat men het kind vraagt 'als je het ziet, teken dan (of modelleer, of wijs aan) wat je ziet'. Kinderen met wie men op deze wijze werkt, wennen er gauw aan, hun antwoorden – ook al hun oplossingspogingen – van dergelijke zichtbare argumenten te doen vergezellen.

Desniettemin blijft het vaak bij het globale niet gekondenseerde 'ik zie het zo' dat nu eenmaal de meetkunde op basisschoolleeftijd kenmerkt. Meetkunde-onderwijs op deze leeftijd mag wel kondensatiekernen aanbieden, maar moet niet door de mogelijkheid van kondensaties bepaald zijn. Alle verbale uitdrukkingsmogelijkheden, die zich in het meetkunde-onderwijs laten verwezenlijken, zijn meegenomen, maar de verbale uitdrukking is niet het doel. Ik heb dit trouwens al vroeger t.a.v. het aanvankelijk meetkunde-onderwijs in de brugklas beklemtoond. Te lang heeft men zich ingespannen, in de meetkundeles in plaats van meetkunde haar *verbale uitdrukking* aan te bieden. Zeker voor de basisschool moet het doel van het meetkunde-onderwijs zijn, *meetkunde* te onderwijzen. Wie wiskunde onderwijst, ziet gaarne dat zijn leerlingen hun gedachten in onberispelijke formuleringen kunnen uiten; te schatten hoe ver de onderwijzende mag gaan met deze eis, is iets waarvoor tact en wijsheid van hem gevraagd worden. Wanneer het 'ik zie het zo' van een leerling door stamelen of het opleggen van formuleringen door de onderwijzende wordt vervangen, is men didactisch geen stap verder. Wie onderwijst, ga eens bij zich zelf na, hoe moeilijk het zijn kan te beredeneren hetgeen men al helder en duidelijk ziet. Natuurlijk kan het nuttig zijn het te proberen; maar om zo iets te motiveren, is een systematische oefening in het twijfelen aan de validiteit van de intuïtie vereist.

Ziedaar mijn filosofie van het meetkunde-onderwijs op basis- en kleuterschool; vanuit dit standpunt wil ik leerstof en leerprocessen analyseren, zoals ik ze in de loop van de tijd tegenkwam. Men zal hierbij nogal wat opmerken dat men gemeenlijk nauwelijks als meetkunde erkent, soms zelfs nauwelijks als een leerstof, die een leerproces vereist. Ik geloof inderdaad, dat ons traditioneel waarderingsstelsel op de helling moet; we moeten al onze zintuigen open stellen voor veel wenken en suggesties die we anders over 't hoofd zien of minachten.

Ik begin met een recente ervaring: we zitten aan tafel, Bastiaan tegenover zijn jongere zusje, de vader tegenover de moeder, de grootmoeder tegenover de grootvader. Ineens bij het dessert zegt Bastiaan (4: 3), met zes aalbessen op zijn lepeltje: 'Zoveel zijn wij.' Ik vraag: 'Waarom?' Hij: 'Ik zie het zo.' En dan meteen: 'Twee kinderen, twee volwassenen, en twee Opa en Oma.' (Mogelijk lagen die aalbessen op het lepeltje in dezelfde dobbelsteen-configuratie als waarin wij tegenover elkaar langs de tafel zaten, maar dat heb ik niet kunnen zien.)

Het was trouwens geen toeval. De volgende dag, met vier sneeuwbessen op zijn handpalm, zei hij: 'Zoveel wonen we thuis'. Bastiaan was toen nog onzeker in 't gebruik van getallen, en hij weigerde hardnekkig te tellen, hetgeen op die leeftijd uitzonderlijk is. In de plaats van echt getalbegrip laat hij in dat

verhaal iets van meetkundige aard zien, hetgeen misschien voor deze leeftijd normaal is. Onze verzamelingstheoretische vooroordelen eisen, dat we de relatie, die Bastiaan tussen de aalbessen en de personen schijnt te constitueren, als één-één-afbeelding interpreteren, maar het is een veel globalere relatie, waarbij verzamelingen niet in elementen geatomiseerd, maar in groeperingen gestructureerd worden. Heb ik gelijk, zo iets meetkunde te noemen?
Bastiaan speelt met Bauersfeld's kubussen. Hij pakt de kubussen in de doos, waarbij hij zo mogelijk een rood zijvlak naar de oppervlakte brengt; er zijn er 31 met op zijn minst één rood zijvlak; ze liggen nu in de doos in drie rijen van acht plus een rij van zeven, en dit ontlokt Bastiaan de uitroep 'er ontbreekt er één'. Uit hekonderdelen bouwt hij de omheining van een boerenhoeve; 'dit moet even lang worden als dat', zegt hij en bedoelt de overstaande zijden van een – ietwat kromme – rechthoek. Is dat meetkunde?
Pas wanneer we tot hogere leeftijden overgaan, zullen we deze vraag met grotere stelligheid bevestigen. Het eerste leerjaar van onze ontwerpschool in Arnhem is van het project 'Waterland' vervuld. Het is een sprookjeseiland, waarvan het schilderij gedurig voor de klas hangt en waarop de kinderen spoedig thuis zijn. Op 't eiland zijn er torens, molens, bruggen, gecompliceerde gebouwen, steigers, wegen, wegwijzers. Wat staat er wel op die wegwijzer, of, als een wegwijzer met opschriften gegeven is, waar zou hij kunnen staan?

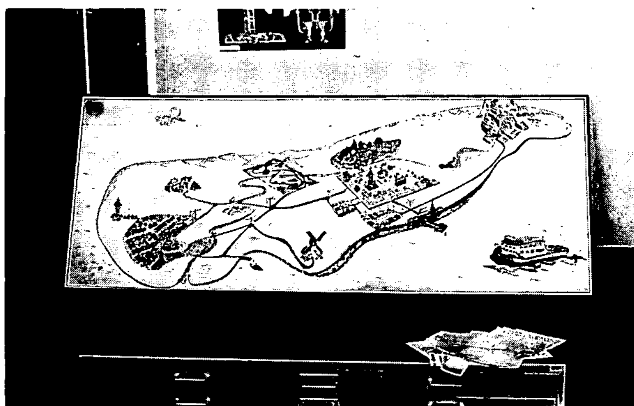


Fig. 1.

Leg iemand, die het wil weten, uit, hoe je van de steiger naar de molen gaat. Hoe ver is het van hier naar daar en waar tussen toren en molen zou een wegwijzer met bepaalde getalgegevens kunnen staan? Wat zie je om je heen, als je bij deze of gene driesprong staat? Hoe kun je van de ene kant van de rivier naar de andere komen? Waar komt de rivier vandaan? Hoe klim je naar de top van het vreemde gebouw in de rechterhoek? En verder een groot aantal puzzels, waarbij het in stukken geknipte eiland (maar op een andere schaal) weer samengevoegd moet worden, en opgaven om het eiland naar een gegeven patroon in stukken te knippen.
Een belangrijk beginsel is het omkeren van opgaven – wat ik noem: de blikwisseling. In plaats van 'wat staat op die wegwijzer?' 'plaats die wegwijzer';

in plaats van 'wat zie je, als je hier staat?' 'waar sta je als je dit ziet?' De vragen zijn in de vorm van een reeks foto's gesteld; ze zijn niet te gemakkelijk, maar ook niet te moeilijk voor de kinderen, die immers het eiland goed kennen.

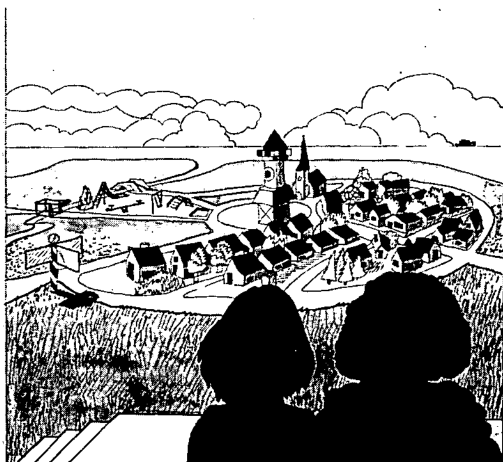


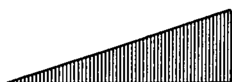
Fig. 2.

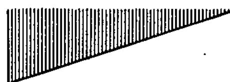
Een variatie hierop, ook uit een milieu dat de kinderen vertrouwd is: foto's van het schoolgebouw met voor- en achtergrond. 'Waar stond de fotograaf?' luidt de vraag, 'hoe ver van de school af?' Natuurlijk, bij no. ... stond de kamera er vlak bij, bij no. ... verder weg, maar hoe was het met no. ... en ...? Natuurlijk, het uitsteken van de wolkenkrabber boven het dak van de school is monotoon gerelateerd aan de afstand van de fotograaf van de gevel van de school. Had men de fotograaf moeten opdragen, die vier kiekjes vanuit één lijn loodrecht op de schoolgevel te nemen? Of is het juist beter, hem onder verschillende hoeken, maar vanuit dezelfde afstand te laten fotograferen? Of had hij op een vaste standplaats het toestel om een horizontale as moeten laten draaien, om meer of minder voorgrond op de plaat te krijgen? Zoveel systematiek had de ontwerper bij zijn eerste poging niet op 't oog. Zou hij er bij de revisie wel toe overgaan? Moet men een materiaal bestemd voor 6–7 jarigen reeds dusdanig structureren en stileren, dat men die drie parameters netjes van elkaar scheidt of moet men de scheiding der parameters juist door de kinderen zelf laten uitwerken? Het is een principiële vraag, in welke mate materiaal, dat men leerlingen aanbiedt, reeds voorgestructureerd mag of moet zijn – ik voel er veel voor, juist jongere kinderen het fenomenologisch rijkere, in uitgewerkte structuur armere materiaal aan te bieden, en ook bij de ouderen zou ik in elk geval niet met het gestructureerde materiaal *beginnen*; om dergelijke redenen houd ik ook minder van logische blokken. Naarmate men verder voortschrijdt, mag de meetkundige structuur scherper ingeprent zijn. En juist het onderhavige motief is er een dat veel perspectieven van progressiviteit biedt. Het is een motief dat men verticaal, van de kleuterschool tot de hoogste klassen van het wiskunde-onderwijs zou kunnen ontwikkelen. Van de kwalitatieve scheiding der drie parameters tot de behandeling

van het zuivere geval, waar slechts één parameter varieert, van het kwalitatief schatten van afstand en gezichtshoek tot het herkennen en formuleren van de monotonie van die relaties, van het aflezen van de directe kwantitatieve relaties uit een tekening of een model, tot de omkering van deze relaties en tot redeneringen in de omgekeerde richting, van de grafisch experimentele tot de echt meetkundige behandeling, tot tenslotte het gebruik van goniometrische functies en echte methoden van landmeting – het is een ware rijkdom van taken en problemen, waarin men de niveaustructuren van een leerproces duidelijk onderkent. Het is een veelbelovend motief voor verticale leerstofplanning, waarvan echter tot nu toe niets is beproefd of ook maar in ontwerp aanwezig is. We kunnen op dit ogenblik zelfs niet gissen, wat de beslissende stappen in dit leerproces zouden zijn en bij welke leeftijden ze verwacht zouden kunnen worden. Ik bedoel bijv. het opvatten van ideeën zoals de rechtlijnige voortplanting van het licht, of concreter gezegd: de techniek, om de relatie van beschouwer en beschouwde in een tekening te objectiveren, waarbij het oog van de beschouwer met de beschouwde onderwerpen rechtlijnig verbonden is en de wederzijdse positie van de verbindingslijnen onderwerp van analyse wordt – wanneer zou zo iets in het leerproces operatief, wanneer bewust, wanneer formuleerbaar worden?

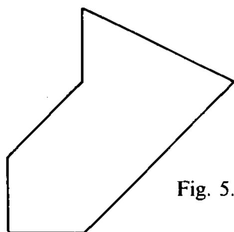
Van dit onderwerp stap ik over naar één dat al enigszins in het derde leerjaar beproefd is, maar dat best in het tweede zou passen: Meetkunde in een rooster, kortste roosterwegen, roosterafstanden, en wel niet alleen in de directe vorm van 'hoever is het van A naar B?' maar ook in de omgekeerde van 'zoek de punten op een gegeven afstand van A'. Het is boeiend, leerlingen, die hieraan werken, te observeren: hoe de ene vroeger, de andere later de symmetrie van de oplossing ontdekt en op de symmetrie van het rooster baseert; hoe vanzelfsprekend geaccepteerd wordt, dat de oplossing uit 'rechtlijnige' stukken is samengesteld en dat de aan verschillende afstanden beantwoordende figuren onderling 'gelijkvormig' lijken. Ook dit motief zou men verticaal kunnen plannen. Wanneer en hoe kan de leerling motiveren, dat de oplossing er zo moet uitzien ('als er verticaal één afgaat, moet er horizontaal één bij') en wanneer kan hij de oplossingen met groeiende afstand inductief uit de voorafgaande afleiden?
Mijn eerste ervaringen met meetkunde op basisschoolleeftijd hebben met de oppervlakteberekening van vlakke figuren te maken. In mijn boek vertelde ik het verhaal van een van mijn zoons die zichzelf het vermaarde probleem van de verdubbeling van het vierkant uit de 'Menoon' had gesteld en op zijn wijze had opgelost. Met een kleindochter van 8 jaren – en daarna met andere kinderen – deed ik het anders. Ik gaf haar de taak, het getekende vierkant door een van dubbele oppervlakte te vervangen; toen ze na een klein halfuur nog niet geslaagd was, troostte ik haar 'het is erg moeilijk, maar ik vertel het je later wel eens'. Twee weken later kwam ik met een spijkerbord, liet haar door elastiekjes begrensde rechthoeken met horizontale en verticale zijden uitrekenen, liet haar ook figuren van gegeven oppervlakte omheinen (voor 10 nam zij een 3-bij-3 vierkant met een 'balkon'). Na een aantal dergelijke oefeningen vormde ik een 'schuin' vierkant (met als zijde de diagonaal van het

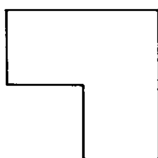
éénvierkant). Zij sprong jubelend op: 'Het is twee – en dat is de oplossing van de som van vorige keer'. Op deze ontdekking volgde een reeks vraagstukken die ze zich gedeeltelijk zelf stelde. Een volwassene, die ons gadesloeg, riep verontwaardigd: 'Wat doe je met het kind, zij kent nog niet eens de Pythagoras'. Ik ben een beetje bang, dat als ze aan de stelling van Pythagoras toe is, haar geestdrift voor de meetkunde al bekoeld zal zijn.
Oppervlakteberekeningen waren ook het onderwerp van het thema 'Kavelland' in het derde leerjaar van onze ontwerpschool. Een met een vierkant rooster overdekte rechthoek op papier was door verbindingslijnen tussen de roosterpunten in soms bizarre, soms zelfs onsamenhangende stukken verdeeld, die boerderijen moesten voorstellen; ze moesten nu opnieuw verkaveld worden, in meer fatsoenlijke percelen, waarbij elke deelnemer eenzelfde oppervlakte terug kreeg. Men kon bij de kinderen die dit thema bewerkten, drie niveaus constateren, het laagste, dat van het knippen en plakken (in fig. 3 wordt de gearceerde driehoek recht boven aangezet), het volgende dat van het lokaal


Fig. 3.


Fig. 4.

aanvullen (in fig. 4 wordt de te berekenen driehoek door middel van de gearceerde tot een dubbel zo grote rechthoek aangevuld). Op deze twee niveaus worden gegeven veelhoeken in driehoeken en trapezia opgedeeld, die door de knip-plak-procedure of aanvullend berekend worden. Het derde niveau, dat slechts een enkeling – zelfstandig – bereikte, was dat der globale aanvulling, door insluiting van de gegeven figuur in een rechthoek (fig. 5), waarvan het overbodige wordt afgetrokken – in vele gevallen is dat de snelste methode.


Fig. 5.


Fig: 6.

Ik kom thans terug tot het meetkundige werk van het meisje dat op het spijkerbord de verdubbeling van het vierkant ontdekte. Ik stelde haar een keer – ze was toen negen – een zeker velen van U bekende opgave: Men vormt een L-vormige figuur (fig. 6), door uit een vierkant een kwartvierkantshoek weg te knippen; deze figuur moet in vier congruente delen worden gedeeld. Zij tekende onmiddellijk, zonder te aarzelen, de oplossing, waarvoor haar moeder een half uur nodig had en waarmee haar grootmoeder niet slaagde.
Een andere keer gaf ik haar een schaakbord en een dobbelsteen, waarvan een zijvlak precies op een veld van het schaakbord paste. De dobbelsteen moest herhaaldelijk gekanteld worden; de vraag luidde of hij op elk veld elke positie

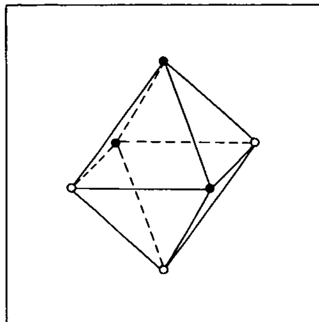
kon innemen. Het meisje voorspelde voor elke kantelweg, die ik voorschreef, de eindpositie sneller dan ik het experimenteel kon nagaan. Doordat zij alles zag, bleek het onmogelijk, haar op het spoor van de redenering te brengen, waarmee een volwassen wiskundige het probleem zou attakkeren.
Ik heb met het meisje, dat op school slecht in rekenen was, veel meëtkunde gedaan. Het meest werd ik door de volgende gebeurtenis verrast (het was in de vakantie tussen het 4e en 5e leerjaar). Ik kwam bij haar ouders op visite en zoals gebruikelijk vroeg ze een som van me. Ik was moe, en daar me niets verstandigs te binnen schoot, gaf ik haar een vraagstuk van een soort, waar ik eigenlijk niet van houd: Twee vrienden zitten in een café, waar men na middernacht niets meer kan kopen, maar al hetgeen men vóór middernacht heeft besteld en gekregen, nog mag opdrinken. Ze zitten er, A met 5 flessen bier, B met 3 flessen. Even na middernacht komt vriend C binnen, aan wie niets meer wordt verkocht. Hij doet het voorstel, de voorraad gelijk te verdelen, en zij gaan er op in. Wanneer ze alles opgedronken hebben, rekenen ze af, d.w.z. C legt 80 ct. op tafel, die de anderen verdelen. Hoe deden ze het?
Het meisje begon de staartdeling 3/80, om direct verontwaardigd uit te roepen: 'Dat gaat niet, waarom geef je me sommen, die niet opgaan?' Ik zei: 'Maar ze hebben het bier eerlijk verdeeld en het ging.' Na een ogenblik van verbijstering, ging zij acht rechthoeken op 't papier tekenen, die zij bierflessen noemde, deelde elke door twee horizontale strepen in drie delen, die zij 'kwarten' noemde (zij had nog geen breuken op school gehad) maar waarvoor ik de term 'kleine flessen' voorstelde. Zij schreef in de kleine flessen de letters A, B, C, naar gelang wie geacht werd ze opgedronken te hebben, en dit waren, wat C aanging zeven flessen van A en één fles van B. Zij tekende ook nog acht dubbeltjes, om zeven aan A en één aan B te geven.
'Is dit meetkunde?' vraag ik opnieuw. Zeker is het wiskunde, en degenen, die beweren dat wiskunde abstraheren betekent, pleeg ik met dit voorbeeld te confronteren: Soms kan juist concretiseren het kenmerk van de wiskunde zijn – mathematiseren bestaat even vaak in het concretiseren als in het abstraheren. Het is een geometriserend concretiseren. Moet men na zulk een oplossing nog vragen 'waarom?' Zij heeft immers alles gezien en in de tekening duidelijk laten uitkomen wat zij gezien heeft – dit is langzamerhand haar tweede natuur geworden.
'Een verjaardagsfeestje met tien kinderen, jongens en meisjes. Wanneer de helft van de jongens naar huis gegaan is, zijn er nog zes kinderen over. Hoeveel jongens en meisjes zijn het geweest?' Zij 'zag' de oplossing en de verklaring die zij haar jonger zusje gaf, bevestigde die bewering.
'Een volle melkbus weegt 10 kg; als de helft van de melk is uitgeschonken, weegt de bus nog 6 kg.; hoeveel woog de melk en hoeveel de bus?' Zij had grote moeilijkheden met de opgave (het was maanden vóór de bieropgave). Haar neefje – iets jonger – had moeilijkheden met de eerste opgave, maar speelde het dan gemakkelijk met de tweede klaar. Ik moet wel zeggen, dat ik met hem veel vroeger het 'gewicht' behandeld had, terwijl ik van de kleindochter niet eens had nagegaan of ze wist wat gewicht was.
Leerlingen in het derde leerjaar, die met lengtemetingen vertrouwd zijn, moeten met de meetkundige interpretatie van grootheden zoals het gewicht

nog bekend worden gemaakt, maar zij wordt dan ook snel geaccepteerd; men laat voorwerpen op de balans vergelijken en overeenkomstig lineair rangschikken. De bij de lengtes aperte lineaire orde wordt zonder aarzelen op de gewichten overgedragen, terwijl vragen, die op de transitiviteit van de groter-relatie doelen, totaal niet begrepen worden. Dit is niet zo vreemd; men denke er eenmaal goed over na: De lineaire rangschikking is een meetkundig globaal verschijnsel, dat in zijn globaliteit op lange trajecten voldoet en geen analyse, bijv. met de transitiviteitswet behoeft; de lineaire orde is primair t.a.v. de transitiviteit. Wanneer wij als wiskundigen de lineaire orde vanuit de transitiviteit willen begrijpen, dan hebben wij, zoals het mathematici betaamt, de zaken weer eens op de kop gezet. Als wij het resultaat van deze draai aan kinderen opleggen, dan begaan wij iets dat ik de (anti-)didactische inversie pleeg te noemen. Ik heb me door talrijke concrete oefeningen ervan overtuigd, dat 8-jarigen het begripspatroon van de transitiviteit totaal vreemd is. (Als jij vlugger loopt dan jij, en jij vlugger dan jij, hoe is het dan met jou en jou?', waarbij ik de bedoelde jongen telkens met de vinger aanwees.) Daarentegen losten alle 8-jarigen, nadat het gewicht met zijn lineaire ordening herkend en geconstitueerd was, zonder moeilijkheden vraagstukken op met twee getekende wippen – A boven, B onder bij de een, en B boven, C onder bij de andere; en zelfs A en B samen boven tegen C en D samen onder op de een en A onder tegen C boven op de andere.
Het is natuurlijk geen vraag of men kinderen van deze leeftijd, zoals tegenwoordig nog wel eens gebeurt, kan trainen in het werken met de transitiviteit van relaties, die in pijldiagrammen zijn uitgestald en ze zulke diagrammen volgens de transitiviteitswet kan laten aanvullen. Het is wel een vraag of dit enige zin heeft. Want waar het hier op aankomt, is het mathematiseren van reële situaties met het mathematische middel der lineaire orde.
Dit mathematiseren is, naar ik al beklemtoonde, iets dat bepaald niet vanzelf spreekt. Bij het gewicht vereist het van 8-jarigen een leerproces, maar dit geldt – men zou het haast niet geloven, – ook met betrekking tot de tijd. Bij voorbeeld is hun – lineaire – gedifferentieerdheid van het verleden, in 't algemeen, niet bewust. Ons thema 'Tijd-lengte-grafiek' begon met een pictorale concretisering van een gedifferentieerd verleden in de vorm van een platenreeks (overovergrootmoeder, overgrootmoeder, grootmoeder, moeder en dochter). Het leidde dan tot de techniek van de tijdas, waarop macro- en micro-histories werden afgebeeld. Als eerste grafiek kwam toen de lengte-ontwikkeling van een zuigeling – een bizonder geschikt voorbeeld omdat je die zuigeling in zijn ontwikkelingsstadia als het ware op het bord kunt plaatsen, loodrecht op de tijdas. Uit de steilheid van de grafiek wordt spontaan de veranderlijke groeisnelheid kwalitatief afgelezen. Een tekenfout van de onderwijzer (een te klein getekend interval op de tijdas, dat een te snelle groei voorspiegelt) wordt als zodanig ontmaskerd. Er volgen tijd-weg-grafieken, die een gecompliceerd reisverhaal illustreren en waaruit omgekeerd karakteristieke trekken van de reis worden afgelezen. Het gevaar dat zulk een grafiek als de reisweg wordt geïnterpreteerd, is door deze opbouw gereduceerd, maar niet weggenomen; dit is een probleem waaraan nog in hogere klassen aandacht moet worden besteed; in elk geval is het af te raden, het onderwerp grafieken met tijd-

afstand-grafieken te *starten*, die tot deze misvatting als het ware uitnodigen.
Is dit meetkunde? Ja, hoewel in een andere functie dan tot nu toe, waar het op het begrijpen van de ruimte aankwam. Het is interpretatie van de ruimte, niet terwille van de ruimte, maar om met behulp van de ruimte dingen te begrijpen, die anders voor het begrip minder toegankelijk zouden zijn. Het is meetkunde niet om wille van de meetkunde, maar – zoals men tegenwoordig ook zegt – als model, de kromme als model van de functie, de rechte lijn als model van de lineaire functie.
Vroeger zei men verhouding en evenredigheid in plaats van functie, maar deze uitdrukkingen zijn nog niet verouderd, al is de meer globale benadering, vanuit de lineaire functie, de natuurlijkste. Ik heb het begrip verhouding didactisch-fenomenologisch nader onderzocht, maar kan er hier niet op ingaan. Het is weer een begrip dat tot verticale leerplanontwikkeling uitnodigt. Al hebben we er nog niet voldoende aandacht aan geschonken, dan kan er toch geen twijfel aan bestaan, dat de meetkundige aanloop tot het begrip verhouding didactisch veel efficiënter en overtuigender is dan die vanuit de numerieke evenredigheden. Is dat meetkunde? Wie zou het willen ontkennen? Hoewel, ook hier ontbreekt nog de rijkdom van echte meetkunde die wij wiskundigen in de meer traditionele benaderingen appreciëren.
Uiteraard heb ik herhaaldelijk afbeeldingsmeetkunde, met de spiegelingen aanvangende, gepropageerd. Een jaar geleden hebben we er al – ook op de basisschool – mee geëxperimenteerd, maar het paste niet goed in het kader, waarin wij toen werkten, zodat het tenslotte onafgewerkt bleef liggen. We moeten er zeker op terugkomen. We moeten het aandurven. De vrees, dat het begrip afbeelding bij onderwijzers en leerlingen niet aankomt, is begrijpelijk; ik deel hem niet, maar erken dat voorzichtigheid geboden is.
Met groepen uit de 5e klas hebben we een geprononceerd meetkundig thema voor de 6e ontwikkeld 'Tijd, afstand, snelheid'. De experimenten startten met de meetkunde van de kubus, en dat functioneerde geheel naar verwachting. We schepten moed. Moed om de bol te introduceren, onze aardbol, met de cirkels erop, grote cirkels, parallellen, meridianen. Het lukte, en we durfden meer aan: antipoden op de bol zoeken en op de mercatorkaart. Het doel was de reis om de aarde, waarbij men een dag wint of verliest. Hoe gaat de zon op en onder, hoe meet men zijn hoogte, welke weg legt de schaduw van een verticaal voorwerp in de loop van de dag af? Hoe leest men uit een grafiek af, wanneer de kleine wijzer van de klok de grote inhaalt, en hoe past men dit toe op de grafiek van de wereldreiziger?
Het is een rijk stuk meetkunde, maar nog volstrekt in de stijl en de sfeer van 'ik zie het zo'. De leerlingen redeneren met hand en oog, aan het model en op 't papier, niet in een taalkundig vastgelegd begrippensysteem. Van hier tot een autonome meetkundige trant en taal is het een lange en in het traditionele onderwijs schromelijk onderschatte weg. Aanleg en motivatie bepalen, hoe ver de individuele leerling op deze weg zal mogen vorderen.

Opgave 1.
Hoeveel essentieel verschillende kubussen kun je schilderen met zes verschillende kleuren (elk vlak één kleur, verschillend van de ander)?

De stereometrie is dood. Leve de meetkunde van de ruimte



Prof. Dr. F. VAN DER BLIJ

Bilthoven

Eén van de klassieke omschrijvingen van de wiskunde is de wetenschap van getal en ruimte. De indeling in algebra en meetkunde heeft lang, ook op de scholen, gefunktioneerd.
Nu we nadrukkelijk de eenheid van de wiskunde in het onderwijsprogramma hebben ingebracht (één docent, één rapportcijfer, één boek) ontstaat de vraag of de meetkunde daarbij niet te veel op de achtergrond geraakt is.
Eerst stierf op school de beschrijvende meetkunde, later ook de stereometrie. Wiskunde II propageert meetkunde met vectoren, maar tendeert naar elementaire lineaire algebra. Hier en daar duikt meetkunde weer op, in stadsplan, in tegelvloeren, in analyse van ornamenten en dergelijke.
In deze pagina's wil ik de aandacht vragen voor de meetkunde van de ruimte, waarbij het echte meten en rekenen niet op de voorgrond gesteld wordt. Daarom vermijd ik het historisch belaste woord stereometrie. We leven nu eenmaal in een driedimensionale ervaringswereld, we worden dagelijks geconfronteerd met meetkundige vormen: blokken, bollen, cylinders, zelfs pyramides, kegels, en eenbladige hyperboloïden. We vinden deze vormen in de architektuur, in gebruiksvoorwerpen, in ornamenten. Zijn de leerlingen al volledig vertrouwd met de ruimte? Dat we met twee ogen een ruimtelijk beeld van de wereld opbouwen is een boeiend fysiologisch en psychologisch probleem. Wanneer we bijv. via een gekleurde bril, gebruikt bij groen-rood stereobeelden, aan de twee ogen tegenstrijdige berichten doen toekomen komt er verwarring. Kijkt U op deze manier maar eens met het rechteroog naar een stel horizontale lijnen en met het linkeroog naar een stel verticale lijnen.
Maar goed, in normale situaties hebben we geleerd onze visuele waarnemingen te interpreteren en onze psyche stelt ons zelfs in staat het toch echt vlakke televisiebeeld ruimtelijk te interpreteren. Ik denk dat meetkunde-onderwijs in de technische richtingen van LBO en MBO gericht zal moeten zijn op voldoende inzicht en praktische vaardigheden.
In het AVO had de stereometrie ook sterk de funktie om deductie en bewijsmethoden aan te leren. Vandaag aan de dag zeggen we *als* je zo iets als axiomatiek en deductie wilt duidelijk maken, er betere voorbeelden dan de meetkunde te kiezen zijn. Accoord, maar daarom hoeft en mag de meetkunde nog niet naar het achterplan te verdwijnen.

We gaan nu enkele andere disciplines en enkele gebieden van dagelijkse ervaring bezien met het oog op de meetkunde van de ruimte. Als eerste voorbeeld de scheikunde. We werden op school al geconfronteerd met stereoisomeren. Twee moleculen bestaande uit 4 groepen in de vorm van een tetraeder kunnen zo zijn, dat ze wel door een spiegeling maar niet door een beweging in elkaar over te voeren zijn (figuur 1). (Het rechter-linkerschoen verschijnsel).

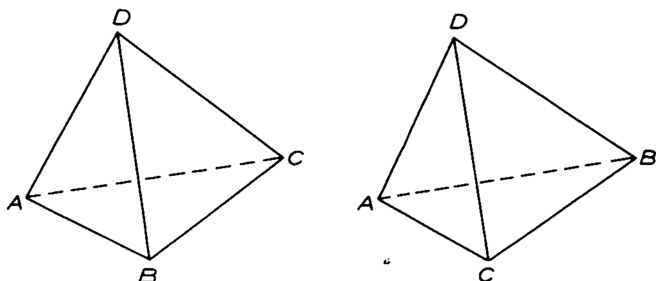


Fig. 1.

De stoffen van deze twee typen zijn chemisch identiek, fysisch ook, als het gaat over soortelijk gewicht, dampspanning, smeltpunt, kookpunt e.d. Alleen bij die fysische processen waarbij de oriëntering van de ruimte een rol speelt kunnen we verschil merken. Bijvoorbeeld bij proeven over draaiing van het polarisatievlak van gepolariseerd licht.
Oriëntering van de ruimte, verschil tussen gelijk en gelijkvormigheid enerzijds en congruentie (= door bewegingen in elkaar over te voeren) anderzijds zijn toch zaken die in het AVO aan de orde dienen te komen. En zou het dan niet bij de wiskunde horen?
Het onderwijs in de (organische) chemie kan gebruik maken van uitvoerige bouwsystemen, hetzij om grote moleculen te maken, om ruimtelijke structuren zichtbaar te maken of ook in de anorganische om kristalroosters op te bouwen.
Veel (ook recent) onderzoek in de chemie gebruikt combinatoriek en theorie van grafen om eerste benaderingen te vinden van fysische eigenschappen van de moleculen (bijv. absorptie en emissiespectra). Een vlakke meetkundig voorbeeld:
Een stof met structuurformule A ziet wit, met structuurformule B ziet blauw (figuur 2). Is dat door berekening alleen aan deze graf toe te lichten? In de

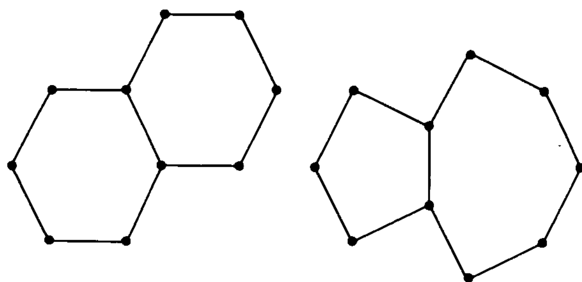


Fig. 2. Naftaleen en azuleen.

grafentheorie construeert men een incidentiematrix, op de plaats i, j, komt 1 te staan als i en j chemisch gebonden zijn, anders een 0. De eigenwaarden van deze matrices zeggen iets over het spectrum van geabsorbeerd licht.
[Dus toch lineaire algebra? Voor de ijverigen onder U: de eigenwaarden bij A zijn $-2{,}3$; $-1{,}6$; $-1{,}3$; -1; $-0{,}6$; $0{,}6$; 1; $1{,}3$; $1{,}6$; $2{,}3$ en bij B zijn ze $-2{,}1$; $-1{,}9$; $-1{,}6$; -0.7; $-0{,}4$; $0{,}5$; $0{,}9$; $1{,}4$; $1{,}7$; $2{,}3$].
Maar naast de graf van het molecuul spelen symmetrieën, blijkende uit invariantie onder bepaalde eindige bewegingsgroepen een rol. Een te eenzijdige nadruk in de elementaire opzet van de ruimtemeetkunde op de lineaire structuur zou er toe kunnen leiden dat bewegingen van regelmatige lichamen, zoals viervlak, achtvlak en kubus en misschien ook twaalf- en twintig-vlak, niet aan de orde komen. En dan missen we een wezenlijk en voor de hand liggend stuk ruimte inzicht. Bewegingen van een kubus vormen een echt stuk wiskunde, dat het voordeel heeft aanschouwelijk behandeld te kunnen worden. Hulpmiddel bij dit onderwijs zal niet alleen de tekening moeten zijn, maar ook het model, echt in de handen gehouden en bijv. zelf gebouwd (uit brokstukken van de chemie bouwdoos?).
Voor de docent even een 'meetkunde van de ruimte' probleem. Van een chemische stof zijn de moleculen gebouwd uit drie groepen van type A en drie groepen van type B. Een molecuul bestaat uit zes van deze groepen in de vorm van een regelmatig achtvlak. Hoeveel verschillende moleculen zijn er? Welke zijn stereoisomeer? (figuur 3) Varianten kunt U zelf verzinnen.

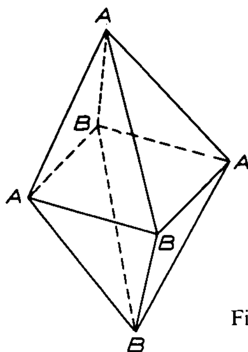


Fig. 3. Een voorbeeld.

In de natuurkunde, speciaal bij de behandeling van het electromagnetisme, moet de ruimtelijke structuur van een spoel gebruikt worden. Het tekenen alleen al is voor veel leerlingen een haast niet te overkomen probleem (van voor naar achter en dan naar rechts, of hoe moet het ook weer?) Heeft de wiskundeleraar daar geen boodschap aan? De oriëntatieregels bij Lorentzkracht e.d. vragen om een goed inzicht in de ruimte, en in de rechterhand (regel).
Hebben we genoeg aandacht besteed aan een links en rechts draaiende schroef of kurketrekker? Is het niet de moeite waard eens te praten over de schroeflijn op een cilinder, over een wenteltrap of een schroeflijn op een kegel? De uitblinkers op het AVO zijn dan al wat voorbereid op zaken die bij plasmafysica en biologie voorkomen. De dubbele spiraal van D.N.A. is een heel duidelijk voorbeeld van de wenselijkheid zaken in de ruimte te kunnen voorstellen.

Uit deze enkele vrij willekeurig gekozen voorbeelden kan materiaal verkregen worden voor de bewering dat ruimteinzicht in vrijwel alle natuurwetenschappen noodzakelijk is. Ik laat aan Uw eigen fantasie over om voorbeelden uit de geneeskunde te vinden (bijv. bestraling van inwendige organen, röntgenfotografie van dezelfden enzovoorts). De geologen spraken mij kortgeleden aan over hoeken van vlakken, breuklijnen in geologische structuren, vroegen om klassieke stereometrie sommen. Maar uit de andere aangehaalde voorbeelden komt de vraag naar andere onderwerpen uit de ruimte meetkunde dan de gebruikelijke uit de stereometrie. Ik pretendeer niet hier een programma of inhoudsopgave van hoofdstukken in een leerboek te geven, maar laat ik toch wat materiaal aandragen.

Voor actief onderwijs: het netwerk van viervlak, kubus, cylinder, kegel. Hier zijn veel vragen zowel van metrische als van structurele aard. De netwerken kunnen gebruikt worden voor problemen van kortste wegen op veelvlakken (U kent toch de spin en de vlieg van Dudeney op het $12 \times 12 \times 30$ blok). Hoe vind je de kortste weg van een punt op het bovenvlak van een conservenbus naar een punt in het grondvlak (gaande over het oppervlak). Hoe loopt een elastiekje gespannen om een kegelmantel? (figuur 4). Bij de cylinder kan zowel de schroeflijn naar voren komen als de sinusoïde (uitslag van een vlakke doorsnede; mooie stelling: de omtrek van een ellips is gelijk aan de lengte van de sinusoïde over 2π).

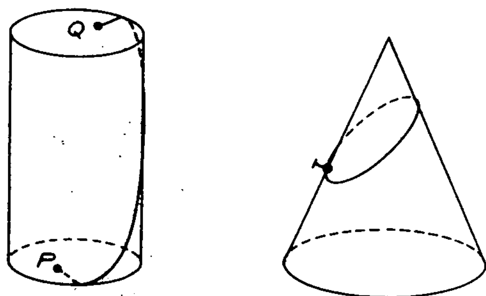


Fig. 4.

Voor project onderwijs. Laat de leerlingen kaarten van de aarde maken (Hier en daar zwerven 'globes' in de vorm van een 20-vlak). Laat ze kaarten in de atlas vergelijken. Hoe vind je de kortste weg op een kaart of kan dat helemaal niet? Voor extra liefhebbers de loxodroom (zie F. Bordewijk: Rood Paleis). Stereografische projectie van de bol op een vlak.

Voor theoretisch ingesteld onderwijs. Onderzoek de locale structuur van een oppervlak. Kies een punt en breng het raakvlak aan. Heeft het meer dan één punt met het oppervlak gemeen? (Voorbeeld kegel, cylinder en eenbladige hyperboloïde). Wat gebeurt er met de doorsnede als we het raakvlak loodrecht op de normaal verschuiven? Bij de bol zien we cirkels ontstaan, bij eieren hier en daar ook ellipsen, bij de eenbladige hyperboloïde komen hyper-

bolen. Stelling: In een 'net'punt ontstaat in eerste benadering een kegelsnede (de indicatrix van Dupin). Wat gebeurt er in een zadelpunt? Wat in een ape-zadelpunt (drie kanten naar beneden voor twee benen en staart, zie figuur 5).

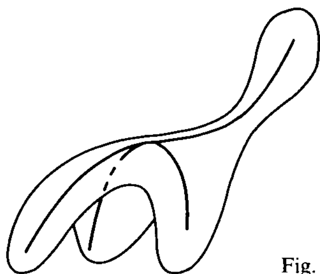


Fig. 5. Het ape-zadel.

Dit is een actueel onderwerp uit de globale analyse, een moderne aanpak van differentiaal vergelijkingen. In een recent boek: A. E. R. Woodcock & T. Poston: A Geometrical Study of the Elementary Catastrophes. Lecture Notes in Mathematics 373 (1974) vindt U een keur van plaatjes van allerlei onnette punten, nog erger dan ape-zadels.

Voor het eenvoudige onderwijs. De oude stereotekenschriften, het afmaken van doorsneden (voor vele oud α-gymnasiasten een van de leukste herinneringen aan de wiskunde). Ook snijpunten van allerlei lijnen met lichamen, maar evenzo wat is zichtbaar, wat is onzichtbaar? (zie figuur 6).

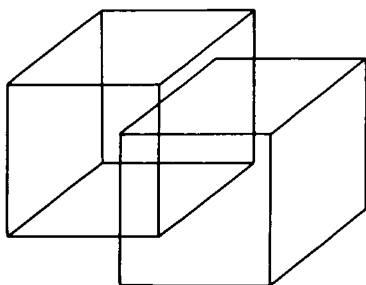


Fig. 6.

Welke invullingen (en stippellijnen) zijn mogelijk voor deze twee voor/achter elkaar geplaatste blokken? Men ontwerpt computerprogramma's om dit soort problemen op te lossen. Hoe 'leer' je een computer dit te doen en hoe 'leer' je het een leerling AVO, LBO of MBO? Zelfs bij 6B zijn er nog twee mogelijkheden!

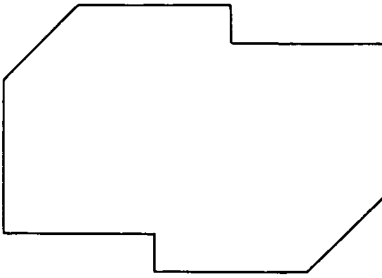


Fig. 6A.

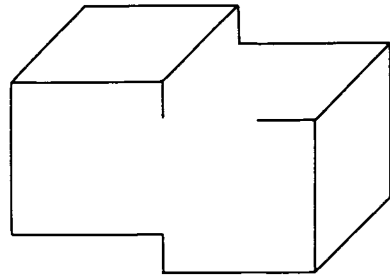


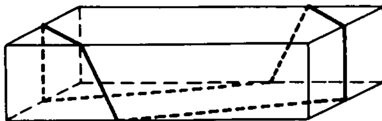
Fig. 6B.

Nare vragen als de Neckerkubussen, onmogelijke zaken als het onmogelijke kratje, de Penrose driebalk, alle wel terug te vinden in prenten als van Escher.

CONCLUSIE.

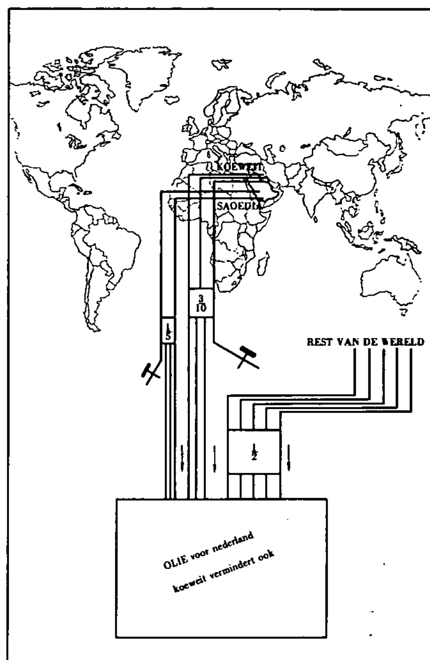
We moeten proberen een stuk meetkunde, in het bizonder ruimtemeetkunde, te behouden en te consolideren in het AVO. Daarbij gaat het niet uitsluitend, en zelfs niet in de eerste plaats om de leerlingen het deductieve bewijs bij te brengen. Al zijn verschillende meetkundige problemen bijzonder geschikt om via inductie (niet volledige!) aan voorbeelden geconstateerde eigenschappen (bijv. drie hoogtelijnen van een driehoek door één punt, som van de hoeken van een driehoek is 180°) tot algemene uitspraken en dan tot bewijzen te komen. Maar het gaat er in het bijzonder ook om de leerlingen vertrouwd te maken (of te laten blijven) met de driedimensionale ruimte, die onze waarnemingsruimte is. En ze min of meer in staat te stellen tweedimensionale afbeeldingen ervan te interpreteren. Natuurlijk moet dit programma in de brugklas beginnen en misschien zelfs zijn zwaartepunt in de onderbouw krijgen.

Opgave 2.
Om een doosje is een elastiekje gespannen als aangegeven in de figuur



Wat is de lengte van het gespannen elastiekje uitgedrukt in de ribben?

On the teaching of geometry A potpouri



S. SCHUSTER

Northfield, Minn., U.S.A.

1. *Introduction*

My understanding is that this International Conference on the Teaching of Geometry will address itself to the improvement of geometry courses. Naturally, vitalizing and modernizing the content of the courses will have the strongest impact on the projected improvement. However, content depends on some prior conditions, namely, on the philosophy and orientation of the courses; in simple terms, on the purposes of the course.

I intend to make some critical remarks on the purpose(s) and content of existing geometry courses. In doing so, I shall put forth opinions and judgments – many without documentation – based on personal experience and interaction with teachers and students from various parts of the U.S.A. over a period of approximately 15 years. I hope that these judgments are intelligent and don't raise the ire of too many Conference participants. However, it may be that a bit of abrasiveness on the part of some of us will precipitate more heated discussions of the group, in which case we will all gain. I shall therefore not hesitate to offer my 'seat-of-the-pants' appraisals and conclusions.

In addition to criticism, I shall offer some alternative purposes and goals for geometry courses, and some consequences (virtues) of this alternative point of view. Finally, I will put forth specific mathematical suggestions to implement the alternative philosophy and to attain the new goals.

Educational Studies in Mathematics 4 (1971) 76–86. *All Rights Reserved*

2. *The last half-century*

The secondary schools of the U.S.A. now have – and have had for most of the twentieth century – Euclidean Geometry as the content of their geometry curriculum. This subject matter often consisted of emasculated versions of Euclid's *Elements*, with dependent (redundant) axioms to make the arguments shorter and circular reasoning of the sort that the Greeks would never have tolerated.

With twentieth century perspective, especially since Hilbert's *Grundlagen der Geometrie*, all mathematicians have been sensitive to the logical weaknesses in Euclid's *Elements*. Those few who were concerned with school geometry were also sensitive to the even greater weaknesses of the textbooks. But it wasn't until after World War II that mathematicians were sufficiently influential to bring to the high schools versions of Euclidean Geometry that were more in accord with modern standards of logical rigor. The reformers wrote more careful developments, paid attention to the notions of order, treated congruence in some proper manner (without superposition), and enriched the content of the course.

Thus, the current situation is that Euclidean Geometry in some axiomatic form, remains the principal content of school geometry courses.

3. *The philosophy*

When we ask questions like 'Why Euclidean Geometry?' and 'What purpose does it serve?', the answer is twofold: (1) For *historical reasons* and otherwise Euclidean Geometry is regarded as a (the?) means of showing students how to build an axiomatic system, of teaching them the deductive character of mathematics, and training them to write formal proofs; (2) Euclidean Geometry is useful – indeed necessary – for science and engineering.

The first reason is stated first because it has been the most influential in the teaching of geometry. The primary focus of the teaching has been on constructing the formal systems: the postulates, definitions and formal proofs. The important thing to note is that this focus has not been changed by the reform of recent years. The reform assumed the existing philosophy, namely that tenth-year geometry was to be devoted to an axiomatic development of Euclidean Geometry, and exerted its energies to preserve Euclidean Geometry as a model of logical thinking. To be sure, some of the new books have enriched the content of the course in other ways, and many of the mathematicians associated with the reform had broader goals, but the mold was cast and it was hard to break. Thus, the reformers did not change the basic aim of the high school course nor were they successful in altering the spirit in which the geometry was to be studied.

4. *Criticism*

I wish to argue that focusing on the formal structure of geometry is a serious mistake which has had some unfortunate results.

(1) The program has failed; that is, the goal of teaching formal structure via geometry has not been achieved.

It is my experience and the experience reported by others that few students

come away from high school geometry with anything beyond a superficial understanding of, and appreciation for, an axiomatic structure. Paul Kelly is said to have made an informal survey with the conclusion that the thing most people recall from their high school geometry courses is that geometry is the subject in which proofs are written in two columns separated by a line on the page.

Some mathematicians argue that the program was doomed from the start because of the inherent nature of the subject. For example, Albert Wilansky believes that axiomatic Euclidean Geometry belongs in graduate school, Abraham Seidenberg confesses that he once 'killed' a Berkeley course by doing parts of Hilbert's *Grundlagen*, and Murray Klamkin asserts that Euclidean Geometry is too rich and complicated to serve for conveying the meaning of formal structure and formal proof.

Although I am not in possession of the data, I have been told by mathematics educators that there is substantial documentation of the fact that large numbers of high school students memorize proofs they don't really understand, come to believe that the only acceptable proofs are those given in 'step-reason' form (echoing Paul Kelly's finding), and in spite of the fact that they have heard of non-Euclidean Geometry, still believe that the axioms they memorized are 'self-evident truths' and are *the* axioms for Euclidean Geometry rather than *a* set of axioms for the subject.

Klamkin argues, as have others before him, that elementary group theory or Boolean algebra, which require simpler axiom systems, are more appropriate as subjects for conveying the meaning of formal structure and formal proof.

(2) The overemphasis on axiomatics has resulted in an underemphasis on applications.

While lip service is paid to the fact that geometry is used extensively by physical scientists and also by biological and social scientists – indeed, by anyone who mathematizes at all – very little is done about this in the actual teaching of the subject. Klamkin, in his paper 'On the Ideal Role of an Industrial Mathematician and Its Educational Applications' (reprinted in *Educ. Studies in Mathematics*, Vol. 3 (1971), 244–269), states that 'the present applications are very few and artificial'. Any perusal of current textbooks bears out Klamkin's assertion.

Not only are applications of the results of geometry slighted, but so are the methods of geometric conceptualization. Geometrizing constitutes a very powerful tool for the mathematician and applied scientist alike. It is an instrument for gaining insight and intuitive understanding in problems that may come from mechanics, electrical network theory, thermodynamics, ecology, function theory – almost anywhere. Yet training in geometrization of physical phenomena is either totally absent or barely present in the current teaching of geometry.

(3) Not enough concern is given to three- (and higher-)dimensional concepts.

Admittedly, the reasons for slighting geometry of three-space are perhaps several; but I place much of the blame on the overemphasis on the axiomatic structure. My argument is that since the study of formal structure and proof can be (and has been) satisfied by studying plane geometry, there is little need

to go into higher dimensions.
The fact that the study of three-space has been so slighted is further evidence that there was little concern for teaching geometry for its usefulness in science and engineering. There is the obvious fact that three-dimensional concepts are essential for applications; but aside from this, it should be recognized that students are being robbed at a crucial time in their lives of the practice of reasoning about space and developing the intuition necessary for the analysis of higher-dimensional problems of science and mathematics.
(4) Other important topics, appropriate to secondary school work, are slighted. Among these are: combinatorial aspects of geometry, transformations, symmetry, and topological aspects of geometry. Though it is not a *bona fide* topic of geometry, problem-solving is one of the serious casualties in the current teaching of geometry. Klamkin is most adamant and eloquent on this point. (See his 'On the Teaching of Mathematics so as to be Useful', *Educational Studies in Mathematics* **1** (1968), 126–160.)

5. *Alternative philosophy*
The tradition of reserving the tenth year for geometry and confining nearly all study of geometry to that period has now been broken to some extent. So when we think about the curriculum in geometry, we can think about it quite broadly, beginning even in kindergarten. In addition to this departure, I suggest that we go a step further and drop using geometry as the main vehicle for teaching axiomatic development of mathematics; and then, decide on a new set of priorities for the curriculum.
Among anyone's top priorities is, quite naturally, the requirement that a body of facts is to be learned; the body of facts currently being taught must be enlarged, and this can easily be done. But the real question is: How should these facts be learned, and in what context? The answer depends on the level of the student's experience. 'Experience' is a key word. I believe that we should build a curriculum in which the student gets a sequence of *geometric experiences*. Examples of such experiences, which would begin in the lower grades, would include: handling (and studying) polyhedra, dissection of polygons, measurement, play with mirrors, experimenting with linkages, and counting in geometric problems. These examples indicate that I believe that high priority consideration should go to relating geometry to science, particularly to the physical world.
In line with relating geometry to the physical world, we should place on our list of priorities *training in geometric conceptualizing* or what I earlier referred to as *geometrizing*. Geometry should be learned as an instrument for interpretation of concepts and problems that arise in other branches of knowledge (including other branches of mathematics). Examples of this sort of work would come from studying reflection and refraction, mechanics of forces and velocities, work, laws of chance (area), elementary combinatorial problems, errors in measurement, ratios, and the basic operations of arithmetic and algebra.
I shall now extrapolate from what has been said thus far and state what I propose as a basic point of view or attitude toward a geometry curriculum.

Geometry should be regarded as a body of knowledge that had its roots in the study of physical space and physical objects, and now concerns itself with abstract concepts such as points, lines, curves, surfaces and volumes. The study of geometry over two-plus millennia had resulted in the development of different techniques for the analysis of geometric problems. Among these are the various methods: synthetic, coordinate, analytic, vector, algebraic, combinatorial, and so on. Some problems admit to solution more readily under attack by one method in preference to the others. Each method has its virtues and each its shortcomings. *The curriculum should be developed to teach the variety of techniques for solving geometric problems.*

Finally, among the techniques should be that of transforming to, or interpreting a geometric problem in some other context. For example, mechanical considerations can be utilized to solve geometric problems (see, e.g., V. A. Uspenskii, *Some Applications of Mechanics to Mathematics*, Blaisdell Publishing Co.), electrical networks can often accomplish such results, optics can be used to solve geometric inequalities, and probability (combinatorial analysis) can solve some geometric problems. In short, if concept X has a geometric interpretation, then it is very likely that concept X can be used to solve some geometric problems as well as geometry can be used to solve problems involving concept X.

Now to return to the question of teaching axiomatic structure. As stated earlier, the burden placed on geometry to do this job is too great and the consequences of carrying the load are many and serious. I offer a compromise solution.

The load should be distributed. Algebra could easily be used at the junior high and high school level to share the burden. Probability can do some of the work, and a good look at other parts of the curriculum will certainly turn up other candidates.

But more important than identifying topics that can be developed axiomatically with ease is that we reflect on what should be taught, how to teach it, etc., because a more pedagogically sound approach is necessary.

Axiomatics is learned slowly, so axiomatic treatment should be spread out over the entire curriculum. Great concentration on formal development, as it currently exists in secondary geometry, is overwhelming to students. The compromise I suggest here is that we make geometry *locally axiomatic* in contrast to the *globally axiomatic* treatment that is now given. That is, I believe that students as they grow to mathematical maturity would benefit more from smaller axiomatic systems within the subject of Euclidean Geometry. This point of view might be regarded as a request to teach mathematics the way it existed among the Greeks prior to Euclid. The theory of congruence no doubt existed as a set of interrelated propositions; the theory of ratio, proportion and similarity was developed as a unit by Eudoxus. An examination of the curriculum topics will surely turn up portions that admit to simple axiomatic development. Perhaps a unit on *transversals*, or one on *circles and angle measure*, or another on *parallelograms*. And some of these could be offered at much lower levels than they are now taught precisely because of their simplicity.

Part of the motivation behind my 'locally axiomatic' proposal is that I think it is most important to begin early in inculcating in students the notion that the propositions of mathematics are logically interrelated and dependent upon one another. A great deal of this can be done before axioms are ever introduced, and before we say that a logical system must rest on certain unproved propositions and in terms of some undefined terms.

Another thing that motivates my proposal is that the present manner of teaching formal structure doesn't teach students where the primitive frame comes from or (rephrased) how and why the mathematician creates his deductive system the way he does. If teaching at the early stages gives students experience – physical and logical – with the concepts, then there is a much better basis for teaching the important matters in foundations. For example, it is important to see *where* the definition comes from; the study of interrelationships of propositions will turn up necessary and sufficient conditions which, the student should learn, can often be utilized to define a concept in a convenient manner. Another thing of importance is the idea of generalizing: How is this done? With a view toward what? Most important are the questions of how to abstract, how to choose axioms, how to mathematize a subject that we already have some knowledge about. This sequence of considerations would be closer to real mathematical development than exists in the current curriculum, because students would then learn that axiomatic treatment of a subject is usually the last stage in the creation of a mathematical subject. Moreover, there would be more training in mathematical creativity than can possibly come from studying the finished and highly polished product, and only filling in the gaps that textbook authors select as exercises.

At long last, I return to questions concerning a 'globally axiomatic' treatment of Euclidean Geometry. As to the question of 'When', the answer is that nobody knows without far more experimentation with the curriculum at the lower level. From Piaget we have learned that what may be sacrosanct is the sequence in which certain topics are learned; but as for the pace of learning and the age at which given topics can and should be studied, we are still somewhat ignorant. As to the question of how the 'globally axiomatic' treatment should be developed, the answer is, 'it's up for grabs'; it certainly depends on the geometry program at the lower level. Most recently, the linear algebraic approach has been championed by a number of prominent mathematicians, among whom are Choquet, Dieudonné, Rosenbloom, Snapper and Troyer. While this method provides a major economy, defining Euclidean space very quickly as a real inner-product vector space, the intricacies and subtleties are hidden behind the powerful algebra. Therefore, if this be the method employed for an axiomatic development of Euclidean Geometry, it must be preceded by perhaps several years of groundwork that would lay the basis for this abstract definition. The geometric basis for each of the axioms of a linear vector space must be understood first, and also the importance of the concept of perpendicularity to Euclidean Geometry must be appreciated before the notion of inner product can be very meaningful.

6. *Enriching the curriculum*

To begin with, I offer the proposition that *invariance* is one of the most important ideas in all of mathematics, and that geometry is unquestionably the most natural subject for the demonstration and use of this idea. I would therefore like to see geometry serve the curriculum by maintaining the invariance notion as one of its themes, utilizing it as an instrument for problem-solving as well as for the usual purpose of classifying geometries.

In a sense, this notion should be brought into a child's early mathematical experience. Some of Piaget's astounding experiments show that small children don't realize that the size (cardinality) of a set is invariant under physical rearrangement of the elements. Thus, arithmetic concepts cannot possibly have meaning until this hurdle is passed; that is, until an invariance is recognized. True geometric experiences with invariance are easy to generate. For example, reflections in mirrors are familiar to every child, and these can be studied with some seriousness to lead to important geometric understanding at an early age. (Steps in this direction have been taken by the Educational Development Corporation in their experimental programs.)

Before proceeding further along these lines, I must backtrack to get the horse before the cart. One can talk about invariance only after *transformations*. That is, a set or structure is invariant relative to, or under, a transformation. Hence, the subject of *geometric transformations* is essential in developing new curricula. This would have many advantages: there is the natural tie-up with algebra and the function concept; the Euclidean transformations can be taught concretely with mirrors and/or physical translations and rotations; translations serve as a basis for an early study of vectors; and the notion of isometry gives the simplest formulation of the idea of congruence. Incidentally, isometry is an excellent example of the mathematizing of a physical concept, for an isometric transformation is a mathematical abstraction (and generalization) of Euclid's idea of superposition.

Once transformations are available, the *symmetry* concept is apparent. For a structure possesses symmetry if it is invariant under some transformation other than the identity. There are many virtues to reaching this subject early in the curriculum: important properties of figures can be gleaned from their symmetries: symmetry concepts are fundamental in science, form the most elementary work on optics to the most sophisticated in elementary particle theory; symmetry principles constitute an important tool for problem solving; finally, with the modern view of symmetries (see E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience Publishers) as transformations that preserve some structure, all geometries are simply studies of symmetries.

In the early grades, Euclidean symmetry can be introduced in many simple ways. For example, if two congruent squares (or other plane figures) are available, one can be taped to the desk top and the other given to the student to fit on top of the taped one. In how many ways can this be done? Mirrors can be used to verify the axes of symmetry. The group concept is concretely available any time the instructor wants to introduce it. Another possibility would be the shifting of strip patterns or plane patterns. Of course, three-dimensional symmetry should be studied concretely through the regular poly-

hedra; and the students should be taught to abstract by drawing and otherwise describing the planes of reflectional symmetry (since only the rotational symmetries of a polyhedron can be realized by physical handling).
Incidentally, I think that learning mathematics this way would be sheer fun for youngsters.
As students move on, feeling at home with transformations, it would be appropriate to go beyond the Euclidean isometries. The most natural next step would be to introduce first magnification and contraction and then point reflections (all *central dilatations*). This is the beginning of the study of *affine transformations*, which also relate directly to physical concepts, and should be related to and used in physical problems.
Now is the time to study *parallel projection* and, in particular, *orthogonal projection* by means of shadows and diagrams. 'What are the invariants?' should be asked. The answer helps to define affine symmetry, which not only explains why spirals are symmetric in a technical sense, but also turns out to be prevalent in biological studies: e.g., phyllotaxis and conchyliometry (see H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley).
Since I have asserted that invariance should be an ever-present theme in geometry curriculum, I think it advisable that time now be given to an example of how invariance becomes a tool for problem-solving and mathematical creativity apart from its philosophical (or foundational) use in classifying geometries.
Consider the problem of determining whether it is possible to inscribe an ellipse in a given triangle so that the ellipse touches the triangle at the midpoints of its three sides. I have given this problem to college calculus students, most of whom failed to obtain any worthwhile insight. However, only a small amount of information about affine transformations provides the key:
(1) An affine map, call it f, can be used to transform the given triangle T into an equilateral triangle E.

$$f : T \to E.$$

(2) A circle C inscribed in E touches the sides of E at their midpoints.
(3) Since the affine map f^{-1} *preserves midpoints*, the image of C under f^{-1} is an ellipse that satisfies the desired conditions.
All the facts about affine transformations used in the solution of this problem are things that I can imagine teaching junior high children by means of parallel projections.
(1′) Three given non-collinear points of a plane can be mapped onto any other three given non-collinear points of the plane.
(2′) Affine images of circles are ellipses. (Perhaps one would define an ellipse this way at the junior high level).
(3′) Ratios of distances, hence midpoints, are invariants of affine transformations.
The next step in physical motivation of geometry is *central projection*, which can be demonstrated by casting shadows using a light bulb. Again, this leads to more mathematizing of physics when the light bulb becomes a mathematical

point, the projection screen becomes a line or plane extending without bound, and the notion of shadow is extended and abstracted in terms of geometric incidences. Of course, this is *projective geometry*, which D. N. Lehner, A. N. Whitehead, and H. S. M. Coxeter (in historical order) have indicated as possible to treat in secondary schools. Coxeter's *Projective Geometry* (Blaisdell) was an attempt to make the subject accessible to advanced high school students. It would seem advisable to introduce some of the notions of projective geometry even earlier because they are so intuitive and they offer so much.

The projective equivalence (invariance) of conic sections is seen immediately when the center of the perspectivity is taken as the vertex of a cone. This will not only serve to delight students, but will be another problem-solving tool as it no doubt was for Pascal when he proved his famous theorem on hexagons inscribed in conics.

Even the invariance of cross-ratio can be derived from physical considerations. I recently discovered that a high-school teacher from this state, a Mr. Robert Wegner of Highland Park High School, developed a unit for projective geometry for sophomore students. In this unit, which is called 'Shades and Shadows', the students study light projection, its relation to Renaissance painting, and then work through exercises that lead them to the discovery of the invariants, including cross-ratio.

Throughout the various geometric experiences suggested thus far, collinearity has been an invariant. More general experiences would lead to topological and combinatorial invariants. Although I don't have any clear idea of what might be fruitful topological lessons, I do believe that it would be worthwhile experimenting at the secondary level with a geometric (rather than epsilontic) definition of continuity, such as proposed by N. Steenrod at the CUPM Geometry Conference (see Part II of the Proceedings.) But there is no doubt that combinatorial matters should be brought into geometry training very early, certainly as soon as students have algebra under their belts. There are many problems that are natural, have physical application, and are fun. Of course, Euler's formula relating the vertices, edges and faces of a polyhedron should be seen as a combinatorial result. In fact, this is graph theory, which can be used to provide a geometric formulation of problems from a variety of fields.

I am afraid that I have rambled over many topics, giving the impression that everything belongs in the school curriculum. (I refrained from mentioning vectors, analytics and linear algebra only because these are already regarded as high priority topics.) Although I don't adhere to my position with complete confidence, I am fairly certain that:

(1) Much more geometry could and should be in the curriculum.

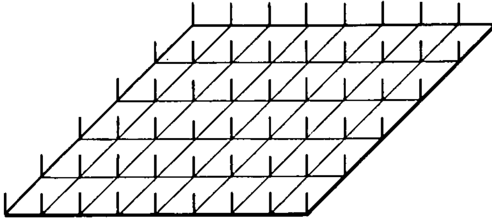
(2) Suggested topics (e.g., affine transformations, projective transformations) need not be treated extensively; even Euclidean Geometry should not get an extensive treatment until students have had several exposures to some of its subject matter.

(3) Much more of what we teach should be motivated by the world of physical, biological and social science.

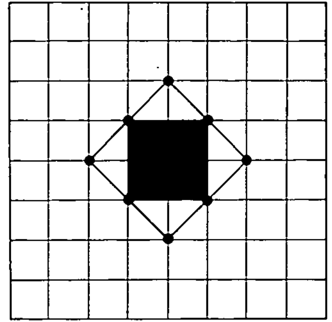
(4) There should be more emphasis on the creative and problem-solving aspects than on studying the highly polished formal structure; that is, the

school curriculum should emphasize geometric techniques, formulations and approaches more than it does the complete development of a geometry.

Opgave 3.
Bewijs dat het onmogelijk is om met een elastiekje op dit spijkerbord een gelijkzijdige driehoek te beschrijven.



De intuïtieve grondslagen van de wiskunde



Dr. P. M. VAN HIELE

Voorburg

1 Waar begint het denken?

Jaren geleden, toen mijn kinderen nog klein waren, legden twee van mijn dochters mij een geschil voor, waarin zij mij vroegen als arbiter op te treden. De vraag was, of een mens, als hij niet slaapt, altijd denkt. De een vond, dat dit niet het geval was: je kunt lekker voor je uitstaren zonder te denken. De ander zei: 'je denkt altijd; want als je bijvoorbeeld in een bos loopt, dan weet je dat je dat doet; je ziet de bomen en dat kun je toch niet weten, als je niet denkt'.
Ik was destijds geneigd het tweede kind gelijk te geven, tegenwoordig voel ik meer voor het standpunt van het eerste. De spreeuw die steeds maar op mijn kerseboom afvliegt om daar de rijpste kers uit te zoeken, neemt beslist de boom met kersen waar, merkt ook op, wat de rijpste kers is, maar ik heb toch de grootste twijfel, dat bij dit waarnemen en uitzoeken een denken gepaard gaat.
Het denken wordt pas waargenomen, als er op dat denken een uitspraak volgt. Met andere woorden: *denken wordt pas gekonstateerd, als er van een verwoording* – of algemener gezegd – *van een versymbolisering sprake is.*

2 De noodzaak van het onderscheid.

De vraag, waar en hoe het denken begint, is belangrijker dan men oppervlakkig zou veronderstellen. Een kind, dat wel eens in een bootje gevaren heeft, is er niet verbaasd over, dat een boot niet zinkt. Evenmin verwondert het er zich over, dat een steen wel zinkt. Daar is echter niet mee vastgesteld, dat een kind er een verklaring voor heeft, waarom een boot niet, maar een steen wel zinkt. Het zal, als het nog weinig ervaring heeft met boten (waargenomen bij een jongen van 12 jaar!) rustig een prop uit de bodem van een boot trekken, om dan tot zijn schrik te ervaren, dat de boot nu wel gaat zinken. Een vlotbrug wekt bij een jong kind grote angstgevoelens op: een vlotbrug is een brug die grote moeite heeft zich boven water te houden. Met deze woorden geef ik geen juist beeld van de werkelijke situatie: het kind heeft een *woordenloos* oordeel over het angstwekkende beeld van de vlotbrug, maar dit oordeel houdt in, dat de toestand zeer kritiek is.

Wie de onderzoekingen van Piaget enigszins gevolgd heeft, weet, dat Piaget weinig waarde hecht aan het woordenloze oordeel. Hij stelt vragen als: 'Waarom zinkt een steen wel en een boot niet?' Zulke vragen hebben pas zin, als er bij het kind al een proces van verwoording heeft plaatsgevonden en het bovendien tot een analyse van verschillende situaties is gekomen.
Piaget gaat er van uit, dat een kind zelfstandig tot deze analyse zal komen; of het mogelijk is, dat het tot zo'n analyse komt onder leiding van een leerkracht, wordt niet in zijn beschouwingen opgenomen. Juist bij het zinken en drijven vind ik dit nogal een extreem standpunt: ik veronderstel, dat vele volwassenen op eigen kracht het probleem van het zinken en drijven niet zullen oplossen.
Aan het denken gaat een fase van een schouwen in de situatie vooraf, dit is dus een fase waarin men de situatie ondergaat. In deze fase die aan het denken voorafgaat, is reeds een inzicht mogelijk: men kan de struktuur van een situatie op een dergelijke wijze ondergaan, dat het mogelijk is te handelen in nieuwe situaties dank zij het inzicht in deze situatie. Men zal deze uitspraak kunnen onderschrijven, als men zich herinnert hoe er ook bij dieren van inzicht sprake kan zijn.
Als een mens op een dergelijke wijze handelt, spreekt men van *een intuïtief grijpen naar het juiste middel.*

3 De rationele benadering van een situatie.

Voor het denken over een situatie zijn er symbolen nodig. Dit kunnen taalsymbolen zijn; het kunnen ook tekens zijn. Het kunnen ook voorstellingen zijn die het karakter van een teken hebben verkregen. Met de taalsymbolen kan men zijn inzicht in de situatie met anderen uitwisselen, men kan zich ook bedienen van een tekenschrift. Soms, men denke aan de hiëroglyfen, heeft dit tekenschrift nog het karakter van de vroegere voorstellingen bewaard. Met behulp van de symbolen kan men een taal vormen, met behulp van deze taal kan men komen tot een theorie.
Als men een onderwijs-leerproces wil toetsen, kan men onderzoeken, hoe ver de leerling gevorderd is in zijn kennis van deze theorie. Als het intuïtieve inzicht aanwezig is, ligt de weg open voor het leren van zo'n theorie. Het onderzoek naar de geschiktheid van een leerling voor een te volgen onderwijsleerproces moet dus niet gericht zijn op de kennis van de theorie, maar op de toegankelijkheid van de leerling voor het intuïtieve inzicht. De onderzoekingen van Piaget die gericht zijn op de kennis van kinderen van een theorie van het zinken en drijven hebben veel verwarring gesticht. Wat een docent interesseert is niet wat een kind incidenteel van een theorie heeft opgevangen, maar wel, wat de intuïtieve kennis is die het moet hebben verworven, hoe men deze kennis doet verwerven en ten slotte, hoe men het kind met behulp van die kennis brengt tot een theorie. Bij primitieve volken zullen kanobouwers waarschijnlijk weinig theoretische kennis bezitten van opwaartse kracht en soortelijk gewicht en toch hebben zij vermoedelijk meer inzicht in de stabiliteit van een kano dan velen van ons.
Wil men onderzoeken, of een kind ergens inzicht in heeft, of het vermogen bezit

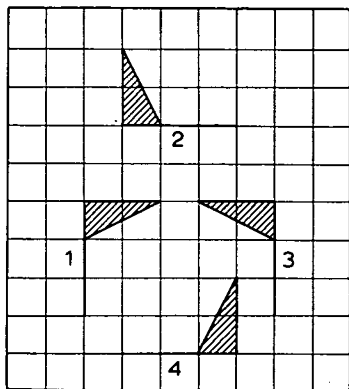
zich snel ergens een inzicht te verwerven, dan moet men zoveel mogelijk de rationele benaderingen vermijden.

4 Hogere denkniveaus.

Men kan na lezing van het bovenstaande tegenwerpen, dat er inzichten zijn die pas kunnen ontstaan *nadat* er een rationele benadering van de problemen heeft plaatsgevonden. Dit is ook zeker het geval: men heeft dan te doen met een *inzicht op een hoger denkniveau.* Wie zich een situatie heeft duidelijk gemaakt met behulp van symbolen, zal dikwijls in het systeem van de symbolen weer een struktuur gaan ontdekken: men komt dan tot nieuwe uitspraken op grond van een schouwen in deze struktuur. Ook deze struktuur wordt aanvankelijk ondergaan; pas door het invoeren van nieuwe symbolen wordt deze struktuur toegankelijk voor een denken over de struktuur. In vroegere artikelen heb ik dit verschijnsel aangeduid met het gebruiken van een taal op een hoger denkniveau. Voor het kunnen denken op een hoger denkniveau is het noodzakelijk, dat men op het lagere denkniveau heeft leren redeneren en daarmee een symboolbeheersing heeft verkregen.
Ik heb lang gemeend, dat psychologen te sterk verbaal gerichte tests toepassen, omdat zij zich geen rekenschap geven van denkniveaus. Ik heb nu alle redenen aan te nemen, dat zij dit doen, omdat zij zich er niet voldoende van bewust zijn, dat er een inzichtelijk handelen in situaties mogelijk is zonder dat men over die situaties een denkstruktuur bezit.
Het handelen op grond van een struktuur behoeft ook bij de mens niet noodzakelijk gekoppeld te zijn aan het bezit van een denkstruktuur.

5 De intuïtieve aanpak van een leervak.

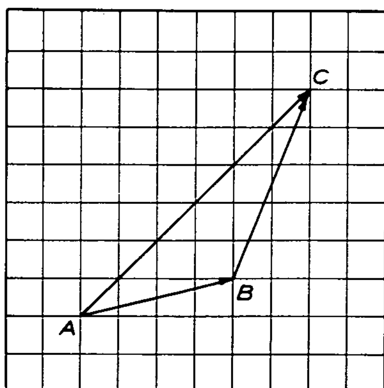
In vakken zoals meetkunde, natuurkunde, aardrijkskunde die niet gebruik maken van de opzet van een ander vak, is het onjuist te starten met een rationele benadering. Zou men dit doen, dan doet men een beroep op taalsymbolen die in incidentele leerprocessen (leerprocessen buiten het onderwijs) zijn ontstaan. Men loopt dan een zekere kans door een aantal leerlingen niet te worden begrepen.
De intuïtieve aanpak begint met het aanbieden van een struktuur. Deze struktuur moet de leerlingen aanspreken. De docent kan handelingen laten verrichten die naar aanleiding van de opdracht door de struktuur worden opgeroepen. Vervolgens kan de docent de resultaten in bespreking brengen, taalsymbolen daarbij laten ontwikkelen. Kortom: het leerproces gaat over in de fase van de explicitering.
Een geschikte aanvangsstruktuur in de meetkunde is het roosterpapier. Men kan bijvoorbeeld op het roosterpapier ergens een punt kiezen. Van dat punt uit kan men een lijntje trekken 'twee naar rechts en één naar boven'. Het blijkt dan al meteen, dat het er niet toe doet, hoe men het roosterpapier voor zich neemt: op het roosterpapier komen vier richtingen voor die niet van elkaar zijn te onderscheiden zonder hulpmiddelen toe te passen. Als men zo een serie lijnstukken laat tekenen, kan men tot een herkenbare figuur komen. Wie links en rechts verwisselt krijgt een soortgelijke maar meestal niet identieke



figuur. Zo wordt het begrip 'spiegelbeeld' geboren. Als men 'rechts' en 'boven' verwisselt, komt er weer een spiegelbeeld.
Het roosterpapier bezit vele eigenschappen die gemakkelijk geanalyseerd kunnen worden.
De eigenschappen van de struktuur van het roosterpapier zijn zo veelzijdig en zo gemakkelijk af te lezen, dat de leerlingen die via deze weg de meetkunde hebben leren kennen heel moeilijk zullen kunnen begrijpen, dat de meetkunde vroeger zo'n ontoegankelijk vak was. De ervaringen met het onderwijs in de vroeger zo moeilijke meetkunde, hebben geleid tot de ontdekking van de denkniveaus. Het is zeer de vraag, of deze ontdekking mogelijk zou zijn geweest met de meetkunde van nu.
Het belang van het roosterpapier is voornamelijk, dat de waargenomen eigenschappen uitgedrukt kunnen worden met behulp van getallen of getallenparen. Een groot deel van de moeilijkheden is daarmee verlegd naar het basisonderwijs.

6 Het intuïtieve begin van het tellen.

Als men van A naar B gaat door middel van de vector $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ (verkorte schrijfwijze voor 'eerst twee naar rechts, dan 1 naar boven') en daarna van B naar C door de vector $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, dan kan men ook van A naar C gaan door de vector $\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$.

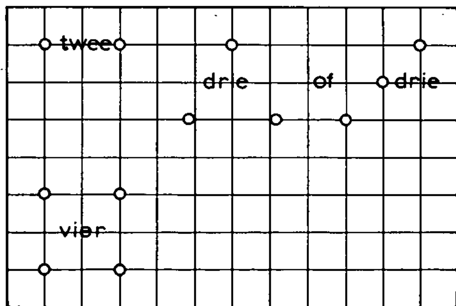


De leerlingen moeten dus inzien dat 'eerst 4 naar rechts en dan 2 naar rechts' overeenkomt met direkt 'vier plus twee naar rechts'. Dit is een optelling en een optelling is oorspronkelijk ontstaan uit een telling. Waar ligt de intuïtieve basis van het tellen?

Het zou te ver voeren dit intuïtieve begin hier volledig uiteen te willen zetten. Er zijn trouwens nog veel onzekere punten. Toch wil ik hier een klein begin daarmee maken.

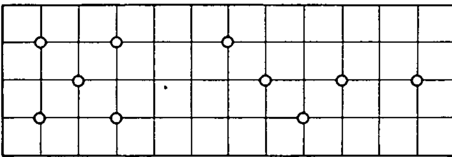
Ik ben er eens getuige van geweest, dat een jong kind een pop ten geschenke kreeg die sprekend leek op de pop die ze al in haar arm had. Het was interessant waar te nemen, hoe de blik van het kind nu eens gericht was op de nieuwe pop en dan weer op de pop die ze al bezat. Haar gezicht drukte daarbij een uiterste verbazing uit. Men mag zonder meer aannemen, dat op dit moment de voornaamste inhoud van het begrip 'twee' geboren werd bij dit kind. Het houdt in 'het een en het ander', waarbij 'het een' en 'het ander' zonder moeite verwisseld kunnen worden. Wie hier tegenwerpt, dat bij het vormen van de 'twee' beslist geen sprake behoeft te zijn van een op elkaar lijken van de voorwerpen, ziet over het hoofd, dat er dan al sprake is van een zekere abstraktie: het kunnen samentellen van twee totaal verschillende voorwerpen of begrippen veronderstelt een 'alverzameling' waarvan deze voorwerpen of begrippen element zijn.

Om 'drie' te begrijpen, moet 'twee' eerst volledig doorgedacht zijn; waarschijnlijk zal dit moeilijk kunnen, vóórdat er een symbool, 'taalsymbool of ander symbool' voor 'twee' wordt gekend. Drie houdt in: 'twee en nog één', maar het bijzondere is, dat ieder element van het drietal als 'een' kan fungeren. Als men denkt aan het symbool voor 'drie' dat bestaat uit de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek, dan houdt dit de gelijkberechtiging van de drie elementen in, maar ook de op drie wijzen mogelijke splitsing van de 'drie' in een 'twee' en een 'één'. Een moeilijker symbool is de 'drie op een rijtje'. Bij dit symbool neemt het middelste element een aparte plaats in; het kind moet met dit symbool gespeeld hebben om te begrijpen, dat ook de andere elementen 'middelste element' zouden kunnen zijn.



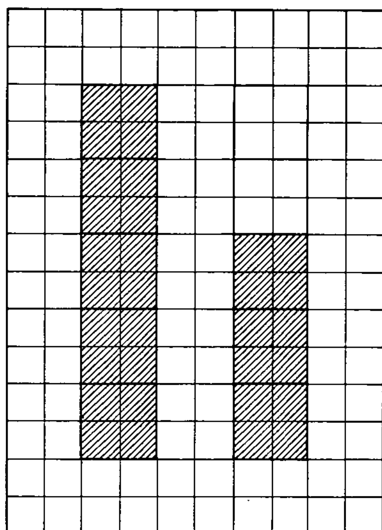
'Vier' is waarschijnlijk het laatste kardinaalgetal dat nog enigszins voor een intuïtieve benadering toegankelijk is. Gebruikt men het symbool van de hoekpunten van een vierkant, dan valt in de eerste plaats op de gelijkberechtiging, direkt daarna de splitsing in twee paren (op drie verschillende manieren). De

splitsing van 'vier' in 'een' en 'drie' is moeilijker, omdat 'drie' op zichzelf al zo moeilijk te overzien is.
Met het bovenstaande heb ik willen aangeven, hoe de kardinaalgetallen 'een', 'twee', 'drie' en 'vier' beleefd kunnen worden en ook beleefd móeten worden. De schepping van de volgende kardinaalgetallen geschiedt volkomen abstrakt: 'Je hebt al een kardinaalgetal en nu ga je weer één verder'. Bij het ontwikkelen van deze abstraktie kan een onderwijs-leerproces helpen: het kan helpen bij het doen memoriseren van de rij der kardinaalgetallen; het kan ook helpen bij de afbeelding: 'een element aan de verzameling toevoegen betekent één stap verder gaan in de rij der kardinaalgetallen'.
Het is duidelijk, dat de matematici die in het basisonderwijs voorschrijven, dat het getalbegrip aangebracht moet worden door aantallen voorwerpen zonder enige ordening, dus in een amorfe ligging, aan te bieden, van een volkomen onjuist standpunt uitgaan. Zij verwerpen de intuïtieve strukturen die de basis van het getalbegrip zouden moeten vormen. Waar zij mee willen beginnen is juist het einde van een proces van abstraktie, zij benaderen de kinderen in een te hoog denkniveau.
Het getal 'een' is wel intuïtief kenbaar, maar het verschijnt eerst als tegenstelling van de 'twee' en later als onderdeel van de 'drie'.



Het getal 'vijf' kan natuurlijk als struktuur gekend worden. Men ziet echter, dat deze struktuur berust op een 'vier' die al een zekere abstraktie heeft verkregen. Zolang het kind nog niet beschikt over de 'wet van het behoud van getal', behoeft het nog niet in te zien, dat $4+1$ gelijk is aan $3+2$.
Bij dit geleide leerproces, dat van de intuïtie naar de eerste abstraktie voert, kan het begrip 'verzameling' geen enkele dienst bewijzen. 'Verzameling' is een eindpunt van een abstraktie: het is de meest losse band die het mogelijk maakt begrippen te tellen. Dat 'verzameling' geen enkele intuïtieve inhoud heeft, kan men al konstateren, als men schoolboekjes van de brugklas erop naslaat. Sommige van deze boekjes spreken van 'elementen met een gemeenschappelijke eigenschap'. Nu, de echte gemeenschappelijke eigenschap is, dat de elementen alle in dezelfde verzameling zitten. Andere boekjes gaan uit van een verzameling postzegels of een verzameling keistenen. Ook dit brengt verwarring, want de bezigheid 'verzamelen' speelt geen enkele rol bij de wiskundige verzameling. Bovendien is de identiteit van de elementen van bovengenoemde verzamelingen dikwijls problematisch. Een begrip is geschikt om element van een verzameling te zijn, als het zo gedefinieerd is dat men het kan herkennen. Deze voorwaarde is noodzakelijk en voldoende. Van de verzamelingen die men in de boekjes als voorbeelden aandraagt, is het bijna steeds zeer moeilijk de elementen te herkennen.

Bij het tellen speelt het begrip verzameling maar een zeer tijdelijke rol. Als men een aantal knikkers telt, hebben de getelde knikkers hun identiteit al verloren: zij zijn element van de verzameling der getelde knikkers zonder dat zij van elkaar worden onderscheiden. Hetzelfde geldt voor de nog te tellen knikkers. Slechts de knikker die net geteld wordt heeft op dát moment een identiteit, het is de knikker waaraan een zeer bepaald telwoord wordt toegevoegd. Zoals ik hierboven heb uitgelegd, is dit tellen alleen mogelijk, nadat er een abstraktie heeft plaatsgevonden.



Ook de stokjes van Cuisenaire zijn symbolen en daarom abstrakt. Men kan het stokje van vijf inwisselen voor een stokje van twee en een van drie. Dit is een symbolische aanduiding voor het samenvoegen van de 'twee' (intuïtief kenbaar) en de 'drie' (eveneens intuïtief kenbaar) tot de 'vijf op een rijtje' (niet meer intuïtief kenbaar). Als men dus het gebruik van dit materiaal aanbeveelt, dan zal dit dus moeten gebeuren, doordat men uitlegt, waarom deze symbolen beter verstaanbaar zijn dan de cijfersymbolen en men zal moeten laten zien, hoe men deze symbolen ten slotte vervangt door de cijfersymbolen. Of men zal moeten verdedigen, dat het visueel leren onderscheiden van 'vijf op een rijtje' en 'zes op een rijtje' op zich de moeite waard is.

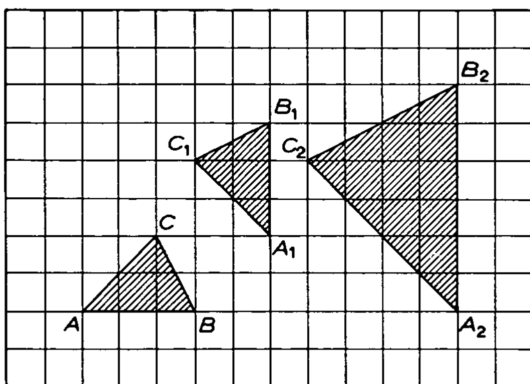
7 Taalsymbolen bij het vormen van het getalbegrip.

Het voorafgaande betoog kan gemakkelijk misverstaan worden. Men kan immers zo'n betoog niet houden zonder gebruik te maken van taalsymbolen. Als ik geschreven heb, dat 'vier' intuïtief ervaren kan worden als een samenstelling van twee paren, dan houdt 'intuïtief' in, dat het kind nog geen symbool voor 'paar' heeft. Is er wel een symbool voor 'paar' of voor 'twee', dan krijgt het kind de mogelijkheid op een meer abstrakte manier over 'vier' te beschikken. 'Vier' wordt dan op een abstrakte manier inwisselbaar voor 'twee' en 'twee' of

voor 'drie' en 'een'. Het intuïtieve kennen van de 'vier' kan dus vervangen worden door een abstrakt kennen met behulp van de taalsymbolen. Op deze wijze is dan ook het abstrakte kennen van de 'vijf' mogelijk: als opvolger van 'vier' en als samentrekking van 'twee' en 'drie'.
Dat aan een stel blokken waarbij het kardinaalgetal 'vijf' behoort, niet tegelijkertijd het kardinaalgetal 'zes' kan worden toegekend, is niet een wetenschap die door biologische groei wordt verworven, het is evenmin vanzelfsprekend. Het is een wet die door ervaring ontdekt wordt. Men kan net zo goed van de 'wet van het behoud van aantal' spreken als van de 'wet van het behoud van stof' of de 'wet van het behoud van energie'. Voor al deze wetten is een symboolontwikkeling noodzakelijk en voor al deze wetten is de geldigheid beperkt binnen een systeem waarvan men de kondities al te dikwijls stilzwijgend aanneemt.
Het erkennen van de twee hoofdstellingen:
1° de vorming van een begrip begint met een intuïtie,
2° een begrip wordt uitwisselbaar met anderen door middel van symbolen, is zowel van grote betekenis voor de filosofie als voor de didaktiek. Men komt niet tot objektiviteit over een bepaald begrip, als men niet mede onderzoekt, of men over hetzelfde intuïtieve uitgangspunt beschikt.
De didaktiek moet zich richten:
a. op de juiste keuze van het intuïtieve uitgangspunt
b. op het ontwikkelen van de juiste taalsymbolen bij dit intuïtieve kennen.
De vraag, of een leerling al 'rijp' is voor een bepaald onderwerp komt neer op de vraag, of hij al in staat is het onderwerp intuïtief te kennen. Als hij tekort schiet in woordenkennis of in een verbale begripskennis, dan zal men in de eerste plaats aan een onderwijs-leerproces moeten denken om dit tekort aan te vullen. Maar men zal moeten beginnen met te zorgen voor een juiste intuïtieve basis. Daarbij zou kunnen blijken, dat de leerling nog niet tot een intuïtief kennen in staat is. Dit kan gemakkelijk onderzocht worden.

8 De intuïtieve inleiding tot de meetkunde.

Zoals ik al eerder opmerkte: het ruitjespapier wordt intuïtief gekend. Vele eigenschappen van dat roosterpapier worden geëxpliciteerd met behulp van getallenparen: vektoren en coördinaten. Begrippen als: hoek, evenwijdig, afstand, vergroten en verkleinen, loodrecht, worden met behulp van vektoren uit het intuïtieve stadium ontwikkeld. Hiermee is verklaard, waarom ik zoveel aandacht moest geven aan het intuïtieve kennen van het getalbegrip. Door het roosterpapier is de moeilijkheid van het intuïtieve kennen voor een groot deel verplaatst naar een veel vroegere periode in het leven van de kinderen.
In de tijd dat in de meetkunde niet zo vroeg vektoren ingevoerd werden, was dit heel anders. Een intuïtieve inleiding begon dan meestal met symmetrie. Ook werden er tegelvloeren gelegd met behulp van kongruente driehoeken en in het patroon dat daarbij ontstond ontdekten de leerlingen evenwijdigheid, translatie en de eigenschap van de som der hoeken van een driehoek. In dat geval werd het driehoekspatroon intuïtief gekend. Het is maar gelukkig, dat we destijds niet met vektoren werkten, want door zijn grote eenvoud is aan



het roosterpapier veel moeilijker te konstateren, dat we met een intuïtieve struktuur te doen hebben. De ontdekking van de denkniveaus en speciaal die van het nulde niveau: het niveau van het intuïtieve kennen, zou veel moeilijker geweest zijn.
In 'De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.' van D. van Hiele-Geldof, 1957, vindt men het volgende protokol, dat een duidelijk beeld geeft van hoe het begrip 'kongruent' intuïtief gekend wordt en ten slotte door analyse rationeel kan worden benaderd.
Pl.* Kennen we het woord 'kongruent'? (Dit woord bleek niemand eerder gehoord te hebben, zoals ik ook verwachtte. Ik probeerde op de volgende manier het woord te benaderen:)
Pl. Als ik de stoelen bekijk waar jullie op zitten, dan kan ik opmerken, dat die kongruent zijn.
Verscheidene leerlingen meenden het nu te weten: 'dezelfde tegels, gelijke tegels'.
Pp. 17.** Als je twee tegels op elkaar legt, moet het passen (wij zijn toen eerst het woord 'dezelfde' gaan bekijken).
Pl. Als ik zeg: Morgen zit je weer op dezelfde stoel, dan bedoel ik juist niet de stoel van je buurman. Het woord 'dezelfde' is dus niet duidelijk genoeg. Nu het woord 'gelijk'. Wat is er dan gelijk?
Ppn. De oppervlakte.
Pl. Laten we eens proberen. Oppervlakte wordt gemeten in ...
Ppn. Vierkante centimeters.
Pl. Neem nu eens in gedachten twee tegels waarvan de oppervlakte van beide 12 cm^2 is. Dat is dus gelijk. Moeten die tegels nu werkelijk kongruent zijn?
Pp. 8. Neen, want ze kunnen nog verschillen in lengte en breedte.
Pl. Zou je dat op het bord kunnen tekenen?
Pp. 8. Tekent twee rechthoeken $2 \cdot 6$ en $3 \cdot 4$ cm^2.
Pl. Ze zijn inderdaad niet kongruent – ook het woord 'gelijk' is dus niet zo gelukkig gekozen.

* Pl. = proefleidster, hier: docent.
** Pp. = proefpersoon, hier: leerling.

Pp. 17. Ze passen toch ook niet op elkaar. (We besluiten, dat Pp. 17 nog het beste antwoord gegeven heeft.)
Pl. Toen jullie vanmorgen aan de ontbijttafel zaten, waren daarop toen kongruente voorwerpen?
Ppn. Ja, borden, messen, vorken, bekers.
Pp. 11. Bij ons zijn de bekers niet kongruent. (Mijn konklusie, dat ze dan uit een groot gezin kwam, was juist.)
Pp. 11. Ieder van ons heeft een andere beker, dan weet je, welke van jou is.
Pl. Maar 's middags, met visite, drink je dan thuis wel uit kongruente teekopjes?
Pp. 11. Ja, maar dan hebben we er verschillende lepeltjes bij.
Pl. Als ik nu nog eens goed naar jullie stoelen kijk, zijn ze toch niet kongruent. (De leerlingen begrepen direkt, dat ik doelde op de plaatjes aan de achterkant van iedere stoel.)
Pl. Waarvoor zijn die nummers?
Pp. 10. Om ze uit elkaar te houden.
Pl. Juist. Om onderscheid te maken. Daar dienen ook de lepeltjes van pp. 11 voor. Je kunt daardoor kongruente teekopjes onderscheiden. Wie kan nu de volgende zin afmaken: Kongruente voorwerpen zijn ...
Pp. 17. Het zijn voorwerpen die in elkaar passen.
Pl. Ik geloof, dat kongruente teekopjes niet helemaal in elkaar te passen zijn; het oor zit in de weg. Met de tegels gaat het prachtig.
Pp. Voorwerpen die dezelfde inhoud hebben.
Pp. 8. Nee, want het kan dan nog hoog en laag zijn.
Pp. 2. Kongruente voorwerpen zijn voorwerpen die niet van elkaar te onderscheiden zijn. (Dit werd met algemene instemming aanvaard: dat was goed gezegd.)

Ik heb het bovenstaande protokol overgenomen, omdat men daaruit verschillende konklusies kan trekken.
In de eerste plaats, dat 'kongruent' onmiddellijk intuïtief gekend wordt. Het woord is de aanduiding voor iets wat al lang eerder waargenomen is.
Vervolgens blijkt, hoe moeilijk een dergelijk begrip omschreven kan worden. Het 'op elkaar passen' van de vroegere meetkundeboekjes blijkt een middeltje te zijn dat lang niet altijd toereikend is. Tenslotte komt de klas – door zorgvuldig na te gaan in een geleid gesprek, wat het begrip wel, en wat het niet uitdrukt – tot de uitspraak: 'kongruente voorwerpen zijn niet van elkaar te onderscheiden'. Hiermee is de betrekkelijkheid van 'kongruent' ook meteen vastgelegd. Niet-onderscheidbare voorwerpen kunnen in vele gevallen toch van elkaar onderscheiden worden.
Wist de proefleidster van tevoren, op welke definitie het gesprek zou uitlopen? Het kan best zijn, dat deze definitie pas in de loop van de gedachtewisseling bij haar is opgekomen. In ieder geval kan men wel konstateren, dat zij op het eind naar deze definitie heeft toegewerkt. Men kan jarenlang efficiënt met een begrip werken, zonder dat men de definitie ervan kent. Een intuïtief kennen is heel vaak voldoende.

9 Intuïtie op een hoger denkniveau.

Men kan opmerken, dat in de verzameling $\mathbb{Z}$ voor de operatie 'optellen' de volgende eigenschappen gelden:
1° De optelling is voor alle elementenparen uit $\mathbb{Z}$ mogelijk.
2° Er bestaat voor de optelling een neutraal element.
3° Er bestaat bij ieder element van $\mathbb{Z}$ een invers element voor de optelling.
4° De optelling is associatief.
Men kan ook opmerken, dat er een soortgelijke struktuur bestaat in de verzameling $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ voor de operatie 'vermenigvuldigen'.
Een dergelijke struktuur bestaat ook in de verzameling der vektoren voor de bewerking 'optellen'.
Door deze gegevens met elkaar te vergelijken kan men tot het opstellen van het begrip 'groep' komen. Om tot dit begrip te komen, moet men de spelregels daarvoor opstellen. We weten, hoe deze moeten zijn, omdat we ze intuïtief kennen. Deze intuïtieve kennis is mogelijk geworden, doordat men over een uitgebreid veld van taalsymbolen beschikt, waartussen allerlei verbindingen bestaan. De woorden 'neutraal element', 'operator', 'invers element' zijn al ingevoerd om het begrip 'groep' mogelijk te maken, zij voeren van het intuïtieve begrip 'groep' naar het rationele. Het is hier weer vrij moeilijk het intuïtieve karakter van een beginstadium te ontdekken, omdat de docent (of het leerboek) de taalsymbolen zo vroeg laat hanteren, dat er op het begrip 'groep' geanticipeerd wordt.
Iets duidelijker waarneembaar is de intuïtieve grondslag van 'bewijzen'. Het begint ermee, dat de leerling konstateert, dat zijn geloof in de waarheid van zekere uitspraak verband houdt met zijn geloof in de waarheid van andere uitspraken. Het besef van die samenhang is intuïtief: men leert de wetten van de samenhang pas kennen door ze te analyseren. Door het analyseren en expliciteren van deze wetten ontstaat de logika die de rationele basis vormt voor het bewijzen.

10 De betekenis van het voorbeeld.

Laten we aannemen, dat de docent 'groep' introduceert door meteen de vier groepsaxioma's mee te delen. Vervolgens zegt hij: 'Om de zaak te verduidelijken, zal ik nu een voorbeeld geven.' Als voorbeeld geeft hij de groep $\mathbb{Z}$, +.
In dit geval is de volgorde precies omgekeerd: eerst is er een rationele grondslag gegeven en daarna komt de intuïtieve. Deze gang van zaken mag men niet zonder meer verwerpelijk noemen. Men kan ze verdedigen door te stellen: als men eerst de definitie geeft, is het doel van het betoog gesteld; na deze doelstelling volgen dan de middelen. Als de leerlingen al vertrouwd zijn met dit soort strukturen, komt het betoog niet in een vakuüm te vallen.
Zonder voorbeeld heeft de leerling het wel heel moeilijk. Als hij leest van een verzameling van elementen waarin een samenstellingsregel gedefinieerd is, dan krijgt hij een heel leeg gevoel. Hij weet al, dat een verzameling van elementen van alles kan betekenen en het woord 'samenstellingsregel' heeft hem zonder voorbeeld niets te zeggen. Door het ontbreken van een voorbeeld

krijgt hij geen bekende struktuur om op terug te vallen. Alleen als hij een brave matematicus in de dop is, zal hij proberen het tekort aan informatie zelf bij te verzinnen en er de regels van de logika op los te laten. Bij het bespreken van zijn fouten wordt dan ten slotte de informatie gegeven die hij al veel eerder had moeten hebben.
Een zeker handboek over ekonomie begint als volgt:
'De *ekonomie* is de tak van wetenschap welke zich ten doel stelt een verklaring te geven van de menselijke handelingen voorzover deze voortspruiten uit het streven naar *welvaart.*'

Wie een wetenschap wil opbouwen, heeft natuurlijk de vrijheid zijn definities zelf te kiezen. Bovenstaande definitie wordt daarna met voorbeelden toegelicht. Daarbij blijkt dan, wat de bedoelingen van de schrijver zijn. Het was echter beter geweest, als hij met de voorbeelden begonnen was en daaruit de definitie zou hebben ontwikkeld. Van een nog objektiever standpunt zou sprake zijn geweest, als de schrijver de definitie had diskutabel gesteld. Juist in gevallen als dit, waarin het doel lang niet voor iedereen hetzelfde behoeft te zijn, is het beter eerst de verschijnselen te bespreken, daarin een struktuur aan te wijzen en pas dan te onderzoeken, welke definitie in de gegeven situatie het meest geschikt is.

11 De leemten in een betoog.

Ieder rationeel kennen begint met een intuïtief kennen. Betrekkelijke objektiviteit over dit intuïtieve kennen wordt verkregen doordat de diskussianten proberen taalsymbolen bij dit intuïtieve kennen te ontwikkelen. De diskussie zal dan eerst moeten gaan over de relaties tussen de gekozen taalsymbolen. Levert de diskussie nergens meer problemen op, dan is er binnen de kring van déze diskussiërenden een betrekkelijke (tijdelijke) objektiviteit bereikt.
Het is goed, dan men zich rekenschap geeft van de betrekkelijkheid van de objektiviteit. Zij is tijdgebonden, want het wereldbeeld kan zich zó wijzigen, dat het intuïtieve kennen van situaties daarbij ook een wijziging ondergaat. De objektiviteit is echter in hoge mate groepsgebonden: de groep kan zó selekt zijn van samenstelling, dat de uitgangspunten van de leden van de groep belangrijk verschillen van de uitgangspunten van even kompetente leden van andere groepen. Wanneer dan bovendien de groep over een zekere groepsarrogantie beschikt die een beletsel vormt om in kontakt te treden met andere groepen, dan kan zich binnen de groep een vaktaal ontwikkelen die het karakter krijgt van een vakjargon. Op deze wijze ontstaat er een objektiviteit die zich beperkt tot de leden van de groep en die gedoemd is met het uiteenvallen van de groep te verdwijnen. Ik noem hier dit extreme voorbeeld, omdat men daaraan het verschijnsel gemakkelijk herkennen kan. In de veel meer verzwakte vorm van het hanteren van een beroepstaal als rookgordijn waarachter men de eigen wijsheden hoopt te kunnen beschermen komt het eigenlijk zeer dikwijls voor.
Veel betere objektiviteit verkrijgt men, wanneer men er in slaagt de diskussie over veel meer personen uit te breiden. Het inzicht, dat daarbij ontstaat, kan

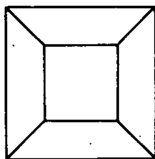
in nieuwe situaties worden toegepast. De taal is een zeer belangrijk middel, zij verschaft ons de mogelijkheid symbolen te gebruiken voor gelijksoortige objekten in gelijksoortige situaties. Het woord 'gelijksoortig' verraadt het intuïtieve moment dat in dit taalgebruik opgesloten ligt. Met dit taalgebruik echter gaat weer een deel van de objektiviteit verloren. Alleen een diskussie in groot verband maakt het waarschijnlijk, dat gelijksoortige situaties en gelijksoortige objekten ook door anderen als zodanig worden ervaren. Een volledige garantie is echter onmogelijk: ieder betoog, ook als het verloopt met behulp van goed gedefinieerde wiskundige symbolen, vertoont leemten die berusten op een nog niet geobjektiveerde intuïtie. Men heeft slechts dan kans een meningsverschil te overbruggen, als men er zich rekenschap van geeft, dat geen enkel betoog, hoe goed het ook in elkaar zit, de zekerheid geeft, dat de hoorder het zo overkrijgt, als de spreker het bedoeld heeft.
Het is dus verwerpelijk, als iemand die een uitspraak gedaan heeft, daarna te kennen geeft, dat 'de zaak zó duidelijk is, dat hij er niets meer aan toe te voegen heeft'. Het is nog veel verwerpelijker, als men een probleem ter oplossing geeft in een zodanige vorm, dat men erop kan rekenen, dat de gegevens anders geïnterpreteerd zullen worden dan voor de oplossing van het probleem noodzakelijk is. Zulke problemen, waarbij de kommunikatiestoornis van tevoren ingebouwd is, komt men vaker tegen, dan men oppervlakkig zou verwachten. Zelfs wiskunde-eksamens zijn er niet vrij van.

12 Samenvatting.

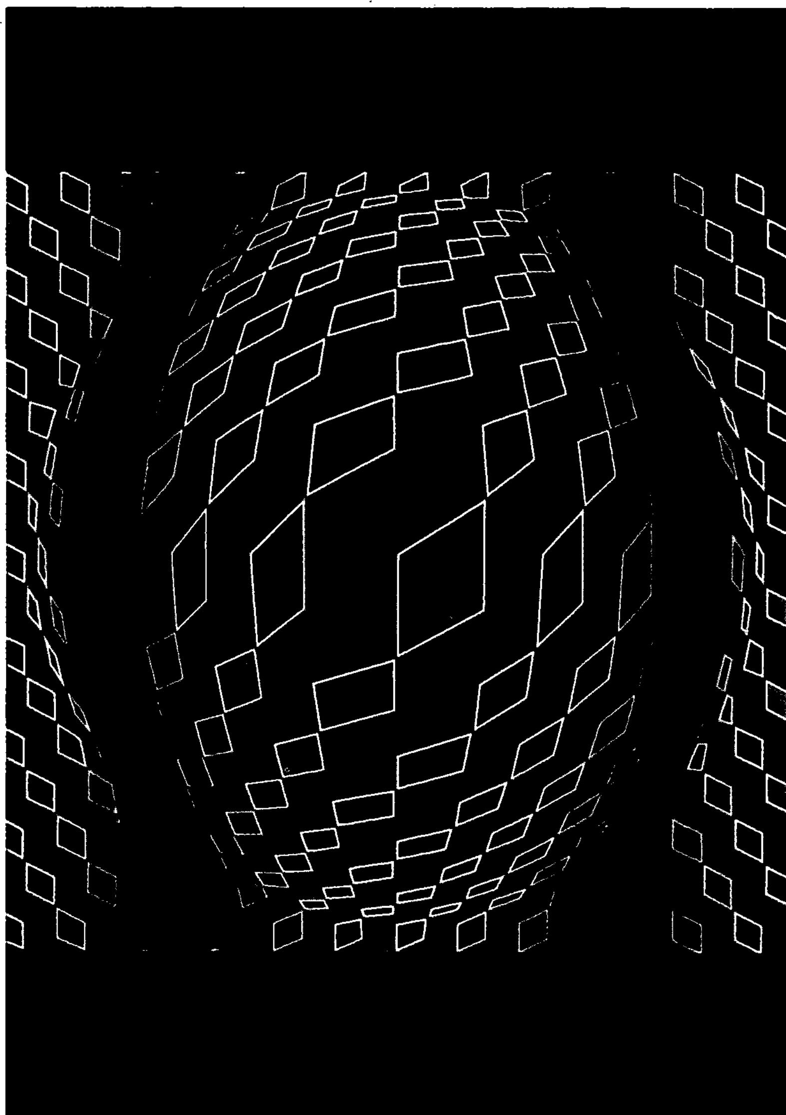
Het denken begint, wanneer er gebruik gemaakt wordt van symbolen. Dikwijls zijn dit taalsymbolen.
Er is al een adekwaat handelen in een situatie mogelijk, voordat er van een denken over de situatie sprake is. De intuïtie gaat aan het denken vooraf.
Het vormen van de juiste symbolen bij een gegeven situatie maakt het mogelijk over de situatie van gedachten te wisselen. Op die manier kan men komen tot objektiviteit over de situatie.
Ook op een hoger denkniveau gaat een intuïtief kennen aan het rationele kennen vooraf. Er worden daarbij weer nieuwe taalsymbolen ontwikkeld.
Het vormen van de taalsymbolen bij een intuïtief gekende situatie kan worden geleid door een onderwijs-leerproces. De voornaamste moeilijkheid bij de overdracht van kennis en inzicht is het verschaffen van de intuïtieve beheersing.
Alleen de kardinaalgetallen 'twee', 'drie' en 'vier' kunnen intuïtief gekend worden. Pas als deze ook in zekere mate rationeel gekend worden, kunnen ook de volgende kardinaalgetallen gekend worden.
Door middel van roosterpapier wordt een groot deel van de intuïtieve inleiding van de meetkunde verschoven naar het getalbegrip.
Om de taal te begrijpen die bij de axioma's van 'groep' wordt gebruikt, moet de leerling al bekend zijn met verschillende groepen.
Het geven van een definitie en daarna een toelichting met voorbeelden is alleen zinvol, als de leerling bij het lezen van de definitie al min of meer weet, waarover de definitie handelt.
Ieder betoog bevat leemten doordat de spreker een rationele benadering tracht

te geven van een situatie waarvan hij hoogstens mag hopen, dat de hoorder daarvan een intuïtieve kennis heeft. De taalsymbolen waarvan hij zich bedient kunnen niet exakt slaan op de situatie die hij wil beschrijven.

Opgave 4.



Dit is een Schlegeldiagram van een kubus. Teken een Schlegeldiagram van het regelmatig twintigvlak.



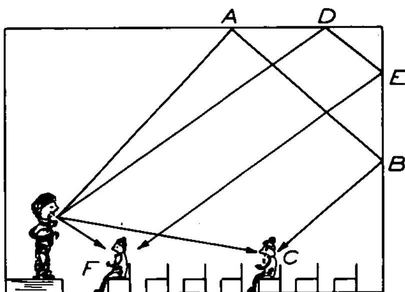
Meetkunde voor het onderwijs

5. Drs. J. van Lint: *De meetkunde om ons heen.*
6. L. Streefland: *Kijk eens naar de zon.*
7. W. Kremers en J. Philips: *Nog zonder kop of staart.*
8. E. de Moor: *De kubus in de brugklas.*
9. Drs. A. J. Th. Maassen: *Een paar meetkundelessen.*

De meetkunde om ons heen

Drs. J. VAN LINT

Zwolle



Het is ondenkbaar, dat er mensen zijn die niet op de één of andere manier genieten van de 'meetkundige' figuren waar we in het dagelijks leven mee in aanraking komen. Niet alleen de kleuren, maar ook de vormen van speelgoed, meubels, flessen, auto's, wolken, golven, bomen, bloemen, bruggen enz. enz. trekken geregeld onze aandacht.
Lang niet iedereen voelt de behoefte om echt metingen te gaan verrichten of verklaringen te zoeken, maar kan hier vaak met listig gekozen voorbeelden snel toe gebracht worden. Een meetkundeles kan men bijzonder verlevendigen door een boeiend uitstapje uit de 'sommetjesreeks' naar de wereld om ons heen. En misschien biedt Euclides een geschikte mogelijkheid om elkaar aan een voorraad ideeën te helpen voor deze uitstapjes.

a Spiegelen

In sommige concertzalen is de (ruimte)akoestiek slecht. Wat is dat eigenlijk en hoe verhelpt men het? De vorm en de afmetingen alsmede de geluidsabsorptie van de wanden bepalen de kwaliteit van het geluid in die ruimte.

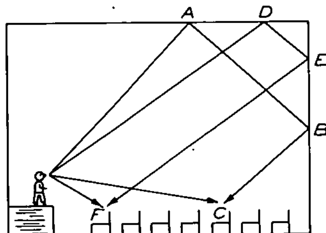


Fig. 1.

Naast het directe geluid dat een luisteraar bereikt is er ook het geluid dat na terugkaatsing tegen één of meer wanden voor een indirecte (diffuse) bijdrage zorg draagt. De intensiteit is kleiner, doordat er gedeeltelijke absorptie in de wanden is en doordat de intensiteit met de afstand afneemt.
Het indirecte geluid sterft door de terugkaatsingen later uit en veroorzaakt zo een nagalm.
Het indirecte geluid dat met meer dan 0,05 sec vertraging ten opzichte van het directe geluid aankomt, stoort de verstaanbaarheid van gesproken woorden, het minder vertraagde draagt tot de verstaanbaarheid bij. Bij muziek draagt een zekere diffuusheid bij tot de ruimtelijke indruk en dus laat men in concertzalen ook een groter verschil van direct en indirect geluid toe.
Aangezien de snelheid van het geluid ongeveer 340 m/sec. is, zal het geluid in 0,05 sec. ongeveer 17 m afleggen. In figuur 1 ziet men dat het verschil van het

directe en het indirecte geluid dat C bereikt, kleiner is dan het verschil van het directe en indirecte geluid dat F bereikt.

Zie nu fig. 2. $ZD+DE+EF = Z_1D+DE+EF = Z_2E+EF = Z_2F$. Als de toelaatbare afstand $Z_2F-ZF = 17$ m, dan is de spreker goed te verstaan als F binnen (Z_2, $ZF+17$) ligt. Te ver vooraan zitten kan dan nadelig zijn door hinderlijk diffuus geluid. Dit is te voorkomen met een reflectie-plaat (fig. 3). Afhankelijk van de grootte van de zaal en de plaatsen in de zaal waar men de 'gunstigste nagalm' wil hebben (zie figuur 4) kunnen reflectie-platen aan het plafond worden bevestigd. Met geluiddempend materiaal kunnen voor dit doel ongeschikte delen van het plafond worden afgedekt.

Als b.v. een verschil van 15 m in de afstand afgelegd door direct en indirect geluid gunstig is, dan zal (L, $ZL+15$) de plaatsen aangeven waar de spiegelbeelden van Z t.o.v. de reflectie-platen moeten liggen.

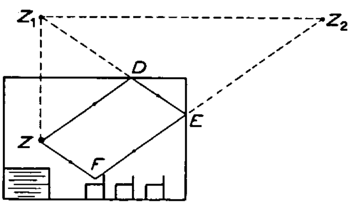
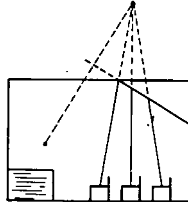


Fig. 2.


Fig. 3.

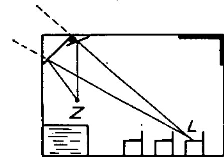


Fig. 4.

b Verzamelingen in de meetkunde

De verzameling punten in een vlak met afstand r_1 tot een vast punt F_1 is de cirkel $\odot$ (F_1, r_1). Evenzo liggen de punten met afstand r_2 tot F_2 op $\odot$ (F_2, r_2). Laten we voor $F_1F_2 = 6$ cm nemen en een groot aantal van deze cirkels tekenen, bijvoorbeeld door r_1 en r_2 telkens met $\frac{1}{2}$ cm te laten toenemen (zie fig. 5).

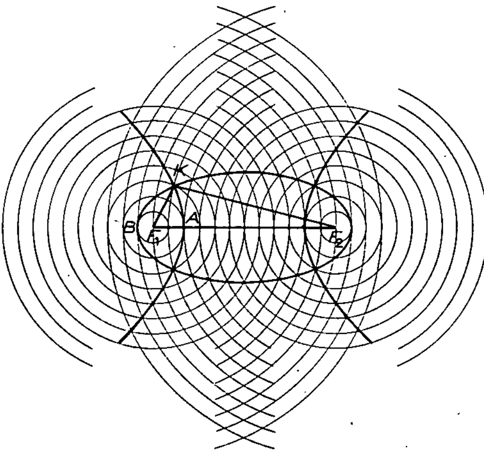
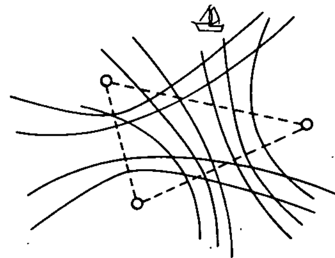


Fig. 5.


Fig. 6.

B is het gemeenschappelijke punt van $\odot\ (F_1, \frac{1}{2})$ en $\odot\ (F_2, 6\frac{1}{2})$ $BF_1 + BF_2 = 14 \times \frac{1}{2}$ cm $= 7$ cm. Als we r_1 met $\frac{1}{2}$ cm vergroten en r_2 met een $\frac{1}{2}$ cm verkleinen blijft de som van de afstanden van de snijpunten van de cirkels $\odot\ (F_1 r_1)$ en $\odot\ (F_2 r_2)$ tot F_1 en F_2 constant 7 cm. Heel snel is een groot aantal punten met deze eigenschap te vinden en de ellips te tekenen. Voor A geldt $AF_2 - AF_1 = 8 \times \frac{1}{2}$ cm $= 4$ cm. Door r_1 en r_2 telkens te vergroten vinden we op soortgelijke wijze een groot aantal punten P met de eigenschap, dat het verschil $PF_2 - PF_1 = 4$ cm. Evenzo de punten waarvoor het verschil $PF_1 - PF_2 = 4$ cm. Deze laatste

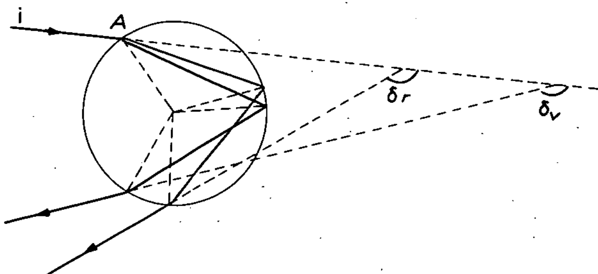


Fig. 7.

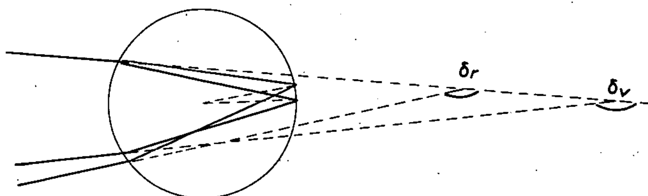


Fig. 8.

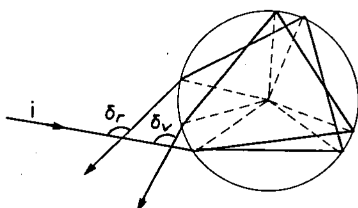


Fig. 9.

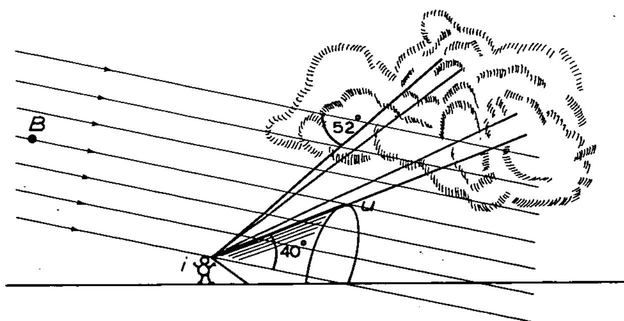


Fig. 10.

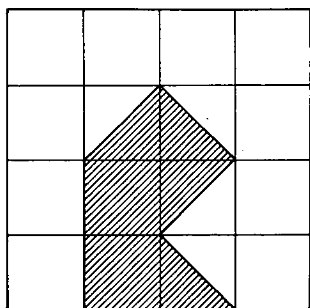
twee verzamelingen vormen samen de twee takken van de hyperbool. Zonder veel moeite kunnen we in dezelfde tekening andere hyperbolen tekenen met dezelfde brandpunten F_1 en F_2, door het constante verschil van de afstanden tot F_1 en F_2 anders te kiezen.
Van zulke velden van hyperbolen wordt in de moderne navigatie gebruik gemaakt. Een hoofdzender (master) en 2 of 3 volgzenders (slaves) zenden radiosignalen uit. Als een schip van de hoofdzender en 1 volgzender de signalen tegelijk opvangt, dan zal door interferentie van de 2 radiogolven een versterkt of verzwakt signaal ontstaan. Het opgevangen signaal is afhankelijk van de fase-verschillen van de golven ter plaatse. De fase-verschillen zijn maatgevend voor het verschil in afstand tot de 2 zenders. De positielijn van het schip is dan een bepaalde hyperbool met de 2 zenders als brandpunten. Gebruikt men nu een andere volgzender dan ontstaat een tweede positielijn. De snijpunten van de twee positielijnen geeft de positie van het schip (zie fig. 6) als men ongeveer weet waar het is. Zo niet, dan kan nog een derde positielijn bepaald worden. De plaatsbepaling is nauwkeurig tot op enkele meters bij afstanden kleiner dan 200 km tot de zenders.

Deze navigatiemethode heeft voor een groot deel de vroegere methode, waarbij met behulp van sextanten de hoogten van bekende sterren werden gemeten, vervangen. Ook die oude methode heeft meetkundig gezien zeer interessante aspecten.

c Kegels

Welhaast iedereen heeft weleens met grote bewondering naar een regenboog gekeken. Wat trekt ons oog? Zijn het de prachtige kleuren, de mooie cirkelvorm, het plotseling komen en gaan of het met de reizende meebewegen van de bogen? De regenboog ontstaat doordat de van de zon afkomstige lichtstralen eerst op het oppervlak van de regendruppels breken, daarna tegen de 'achterzijde' terugkaatsen en tenslotte weer onder breking de druppel verlaten. De brekingsindex varieert met de golflengte van het licht, waardoor de stralengang voor de verschillende kleuren verschillend is.
In de figuren 7 en 8 is tweemaal de mogelijke stralengang door een druppel ruw geschetst. Er is aangenomen dat de druppel bolvormig is, hetgeen lang niet altijd het geval is, maar er is toch wel te zien, dat afhankelijk van de plaats waar de lichtstraal de druppel treft, de uiteindelijke deviatiehoek δ tussen in- en uittredende straal kleiner of groter is. Van de rand af naar het midden toe gerekend, wordt die δ eerst kleiner dan weer groter.
Er is een minimum deviatie δ_{min} te bepalen waarmee een duidelijk grotere hoeveelheid stralen uittreedt dan met andere deviaties.
Voor violette stralen is δ_{min} ongeveer 140° en voor rode stralen ongeveer 138°. Als de stralen tweemaal binnen de druppels teruggekaatst worden zoals in fig. 9, krijgen we op soortgelijke manier een δ_{min} voor violet van 128° en voor rood van 130°.

We vragen ons nu af waar de druppels zich bevinden die in onze richting voornamelijk violette stralen zenden. Het enige waar we op letten moeten, is dan de hoek ZON - DRUPPEL - OOG of in fig. 10, hoek BUI. Deze moet ongeveer 40° zijn en ruimtelijk gezien moeten we die druppels dus verwachten op de mantel van de kegel, met de lijn door ons oog en de zon als as en met halve tophoek 40° (daarom zien we cirkelbogen). De druppels die rode stralen naar ons oog zenden liggen ook op de mantel van zo'n kegel maar dan met een halve tophoek van 42°.
Voor de veel lichtzwakkere stralen die tweemaal binnen de druppel zijn teruggekaatst zijn de halve tophoeken van de kegels voor violet 52° en voor rood 50°. De kleinste regenboog heeft violet aan de binnenkant en rood aan de buitenkant terwijl dit voor de grotere boog net andersom is! Verder valt uit het voorgaande ook af te leiden, dat de hoek die BU met het horizontale vlak maakt niet groter mag zijn dan 42° als we de helderste regenboog willen zien. Bij het zoeken naar voorbeelden heb ik veel profijt gehad van de boeken van Prof. Dr. M. Minnaert: 'De natuurkunde van het vrije veld'.
Talrijke aardige voorbeelden staan ook in het tijdschrift 'Pythagoras', wiskundetijdschrift voor jongeren.

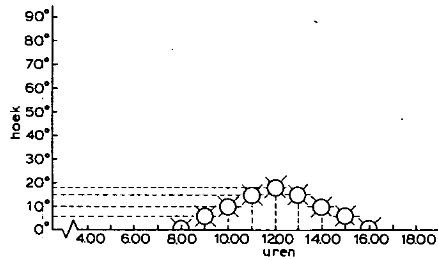


Opgave 5:
Maak een (niet-triviale) verdeling van deze figuur in 2 stukken die tot een vierkant samengevoegd kunnen worden.

Kijk eens naar de zon

L. STREEFLAND

Zeist



1 Inleiding.

Binnen het kader van de werkzaamheden ten behoeve van de ontwikkeling van een kompleet schoolwerkplan voor de basisschool, is voor het zesde leerjaar een tema in ontwikkeling, getiteld: '*Tijd, afstand en snelheid op onze aarde*'.
Vatten we de doelstellingen voor het ontwikkelde materiaal bij dit tema kort samen, dan komen deze neer op:
- het toepassen van wiskundige methoden in andere vakgebieden (met name de aardrijkskunde), wat nader gespecificeerd zou kunnen worden in
  - meetkundige verkenning van de bol,
  - het redeneren op grond van konkreet aanschouwelijke gegevens,
  - het ontwikkelen van het idee van de afstand-tijdgrafiek en het laten ervaren van de toepassingsmogelijkheden hiervan bij het oplossen van bepaalde problemen.

Afgezien van de meetkundige verkenning van de bol, spelen binnen andere gedeelten van genoemd tema, allerlei meetkundige begrippen in toepassingssituaties een niet onaanzienlijke rol. De meetkunde is dan sterk geïncorporeerd in niet-specifiek meetkundige aktiviteiten. Schrijver dezes heeft de bedoeling een schets te geven van enkele lessen, waarbij behalve wiskundig-inhoudelijke zaken, vooral het verloop en de inrichting van het gegeven onderwijs een sterk aksent krijgen.

2 Benadering van het begrip tijd.

In het leven van alle dag heeft de zon van oudsher een belangrijke rol gespeeld. Een eerste differentiatie in het begrip tijd (op plaatselijk nivo) vond bijvoorbeeld plaats door de begrippen dag en nacht te relateren aan het al dan niet 'zichtbaar' zijn van de zon en door binnen de dag zelf aan opkomst, hoogste stand en ondergang van de zon een zekere tijdsbetekenis toe te kennen.
Wanneer we met de kinderen van de zesde klas het zo moeilijke begrip tijd wat nader willen gaan onderzoeken, ligt het eigenlijk voor de hand, dit evenals de primitieve mens dit deed, in eerste instantie vanuit aards standpunt te doen en je te richten op de zon.
Voor we echter zo ver zijn, besteden we aandacht aan:

3 Hoeken meten.[1]

De hoogte van de zon is niet te geven in een lengtemaat. Hoe zou dit dan wel kunnen?

- Wie is wel eens naar de horizon gelopen?
  Hoe moet dat dan?

Eksperimentje 1

We meten de hoogte van 'een zonnetje' hoog op de muur afgebeeld (voor in de klas). Niet iedereen ziet dit zonnetje onder dezelfde hoek.

- Laat eens iemand achter uit de klas naar het zonnetje lopen (en er naar blijven kijken). Let op zijn/haar hoofd. Wat gebeurt er?
- Van tevoren hebben we er voor gezorgd, dat er drie touwen in het hart van ons 'zonnetje' bevestigd zijn (minstens ter lengte van het lokaal).
  We spannen de drie touwtjes naar drie kinderen in de klas, die op verschillende afstanden van het 'zonnetje' zitten (figuur 1) (Touwtjes op bankhoogte).

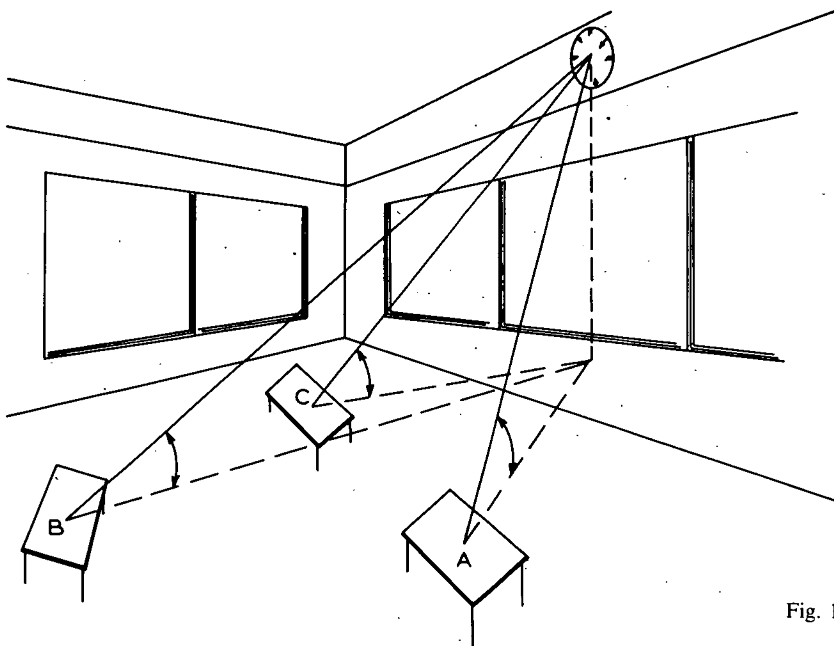


Fig. 1.

De vraag is nu: Hoe vergelijk je die hoeken bij *A*, *B* en *C*?
Door te zorgen, dat *A* en *C* in hetzelfde vlak komen als dat, waarin *B* ligt, worden de hoeken gemakkelijk vergelijkbaar (figuur 2). Touwtjes vanuit *A* en *C op bankhoogte* draaien.
N.B. Laat vooral de kinderen met suggesties komen.

[1] Binnen het tema is al eerder aandacht besteed aan het hoekbegrip.

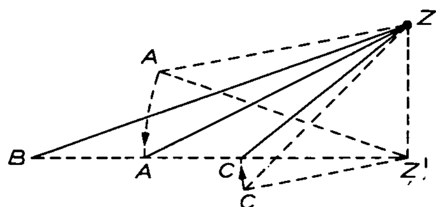


Fig. 2.

Overigens is het begrip: 'Het *onder* een hoek zien van ...' voor de kinderen niet evident.

a. Naarmate je dichter bij D' komt zie je D onder een kleinere hoek, volgens de kinderen, omdat die hoek bij D steeds kleiner wordt.

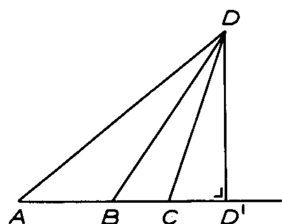


Fig. 3.

b. Om tot een nadere begripsbepaling te komen, kan misschien eerst het volgende gedaan worden:

zon komt op



Onder welke hoek zie je die zon?

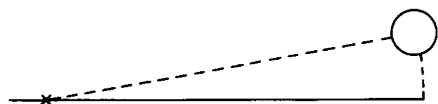


Fig. 4.

En zó?

En zó?

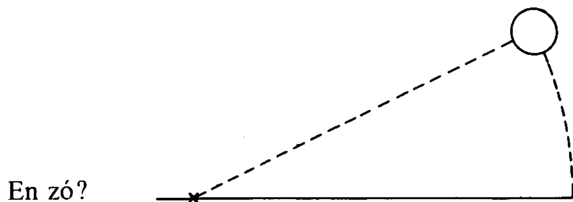
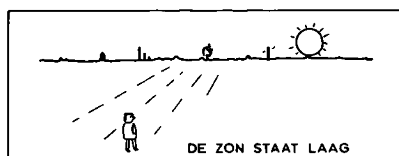
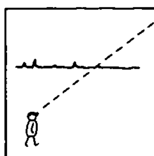


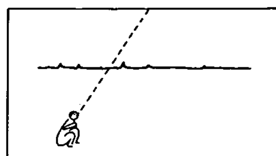
Fig. 5.

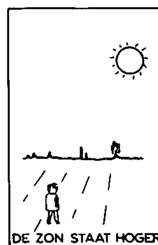
Daarna:

Terug naar het eksperimentje:
- Laat alle kinderen (met een gradenboog) de hoek meten (hoe werkt zo'n ding?), waaronder zij vanaf hun plaats het 'zonnetje' zien.

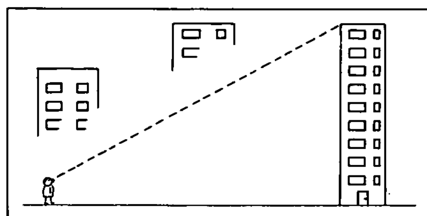


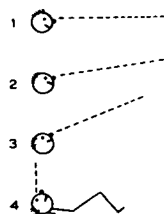


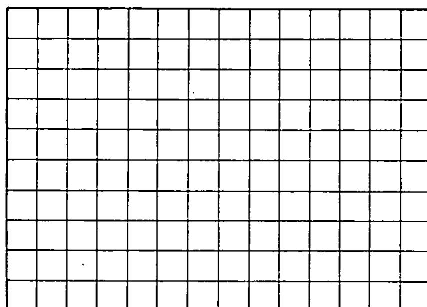




HOE HOOG STAAT DE ZON ?







Werkblad 1

Werkblad 2

Werkblad 1
Hoeken tekenen in perspektief en de hoogte (in graden) schatten. (Eventueel naar aanleiding van de vraag: Hoe laat is het hier?)
N.B.: Aan de leerlingen moet duidelijk (gemaakt) worden dat in perspektivische tekeningen het meten met de gradenboog weinig zin heeft.
Teken bijvoorbeeld de hoek van een gebouw in perspektief. De beide hoeken bij *H* zijn 90° (in werkelijkheid), maar in dit figuurtje verschillen ze.

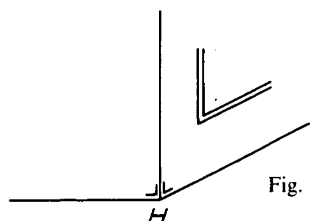


Fig. 6.

Werkblad 2
1 en 2 Hoeken meten.
3 Filosoferen over de vraag: 'Kun je met gegeven hoek en afstand een 'onbereikbare' hoogte meten?' (bijvoorbeeld een flatgebouw)?

Eksperimentje 2
In dit eksperiment stond de vraag centraal: 'Hoe hoog staat de (echte) zon op dit moment, gemeten in een hoek?'
We waren benieuwd. Zou *de hele klas* voldoende gehad hebben aan het voorgaande onderwijs om hier achter te komen?
We begonnen met:
'Schat eens!' (maar denk erom: niet te lang naar de zon kijken ...) Daar kwamen de eerste reakties: 'Zestig graden, zeventig graden, vijfenvijftig! ...'
De didaktische situatie liet zich op dat moment het best karakteriseren als het midden tussen een verkoping bij opbod en de prijzenreeks, die een marktkoopman bezigt bij het toewerken naar zijn klimaks.
We hadden al bij voorbaat enige binnenpret, omdat we wisten, dat de mens in het algemeen hoogten verkeerd schat (te hoog), omdat hij niet in staat is de stand van zijn hoofd op een korrekte manier te beoordelen.
De schattingen werden vastgelegd. Nu kwam het probleem zelf. We stelden alleen: 'Probeer er maar achter te komen. De spullen die je nodig denkt te hebben mag je meenemen (of later ophalen).'
Spoedig daarna was de hele klas, verspreid over het plein bezig, verdeeld in groepjes.
Een lichte aarzeling was merkbaar. Hoe dit probleem aan te pakken? De zon scheen fel en de schaduwen waren opvallend. Een golf van inventiviteit spoelde over het plein en vrij snel was bijna elke groep intensief bezig.
Eén groep kwam met de vraag: 'Meneer, mogen we touw halen.' Het zien van de schaduwen en de gedachte aan het eksperimentje met het zonnetje in de klas leidden tot de volgende oplossing:


Foto 1.


Foto 2.

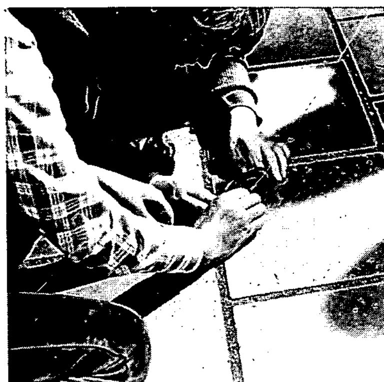


Foto 3.

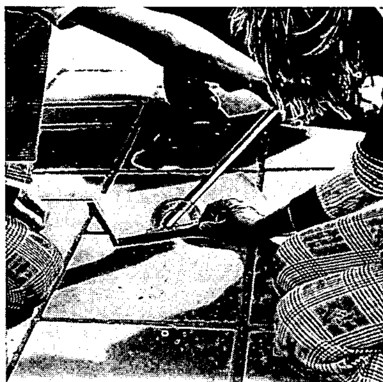


Foto 4.

Touw spannen van het hoofd van een meisje (foto 1) naar het eindpunt van haar schaduw (foto 2) en daarna de hoek meten met een gradenboog (foto 3). Een andere groep 'werkte' met een liniaal, die in de richting van de zon gehouden werd (foto 4). Ze redeneerden: 'Als we de liniaal (rustend op de grond) zò naar de zon keren, dat we geen schaduw meer zien dan ...'
Weer anderen vroegen om krijt, legden de schaduw van een kind op het plein vast, maten de lengte van die schaduw en voltooiden, na de lengte van het betrokken kind gemeten te hebben de volgende driehoek:

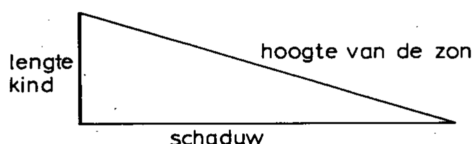


Fig. 7.

althans dat wilden ze doen. Aangemoedigd door het hoopgevende verloop bij de verwerking van de opdracht tot nu toe, wilden we nog meer en suggereerden de groep het probleem verder op een blaadje papier in de klas te gaan uitzoeken, wat neerkomt op toepassing van de meetkundige vermenigvuldiging als weergegeven in:

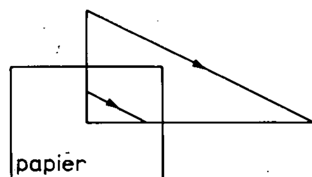


Fig. 8.

Geen nood. De kinderen pasten, als hadden ze nooit anders gedaan, de schaal 1 : 10 toe en tekenden de verkregen driehoek tienmaal zo klein.
Het weer was stralend, maar winderig. De leerlingenboeken bij dit tema waren meegenomen en lagen bij de geschetste aktiviteiten te klapperen op het plein. Bij één groep bleef het boek even open liggen bij de grafiek van pagina 12 (no. 2).

'Meneer hoe laat is het?', vroeg een jongen. 'Elf uur'. Hij stelde toen: 'Dan is de hoogte van de zon nu 60°.'
Overzien we voorgaande beschrijving, dan zijn enkele opmerkingen op zijn plaats, namelijk:

- De kinderen zagen kans op allerlei manieren het probleem aan te pakken. De meeste van de oplossingen die we gezien hebben, lagen op hetzelfde nivo:
  - het kind, schaduw, touwtje, hoek meten
  - liniaal in de richting van de zon, hoek meten
  - potlood, schaduw etc.

De oplossing, als gekozen door laatstgenoemde groep, had een wat indirekter karakter, mede door de ekstra eis, die aan de groep gesteld werd.
Achteraf werden alle oplossingen besproken.
De belangrijkste vaststelling daarbij, die zich eigenlijk al manifesteerde bij de oplossingen op het plein was, dat het voor de kinderen volkomen *doorzichtig* was, dat naar gelang een gekozen objekt groter is, de bijbehorende schaduw ook evenredig toeneemt. (De bij verschillende voorwerpen gevonden driehoeken zijn inpasbaar. De hoekkonstantie is voor de kinderen vanzelfsprekend.)

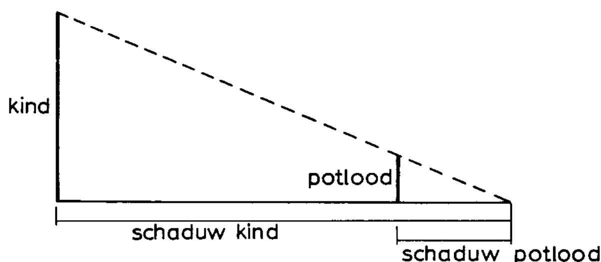


Fig. 9.

Werkblad 3

- Waar staat de zon? Waar het hoogst? Hoe weet je dat?
  Teken de schaduwen in de gevallen 1a en 2a. Denk aan 'verhoudingen'.
  Stel: 'Op plaatje 1 wijst de schaduw naar het noord-westen'.
- Kun je dan iets zeggen over het tijdstip van de dag?
- Kun je de hoogte van de zon bepalen in geval 3? (gebruik gradenboog).

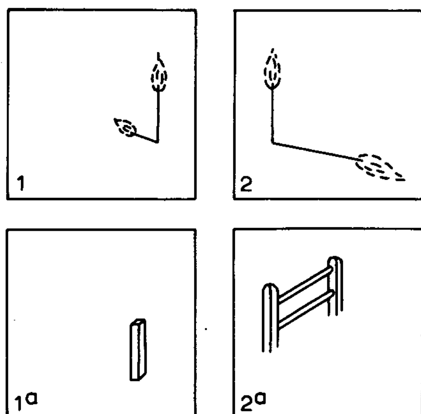
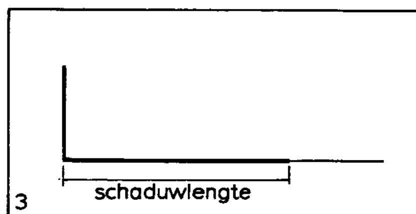


Fig. 10.



Werkblad 3

4 Kijk eens naar de zon.

De voorgaande ervaringen leidden als vanzelf naar het volgende eksperiment (op het plein), namelijk:
- het vastleggen van de zonneschaduwen van een stokje gedurende een hele dag.

Inrichting van het eksperiment:
1. Neem een plaatje tripleks (of multipleks of iets dergelijks) van 30 cm × 40 cm bijvoorbeeld. Sla daarin bij de rand een spijker (De spijker funktioneert als schaduwstok.).
2. Geef de windrichtingen op de plank aan (figuur).
3. We oriënteren met behulp van een kompas de plank op het plein.
4. Het is nu de bedoeling, dat bijvoorbeeld om het uur (of om het half uur) de zonneschaduw van de spijker op de plank wordt vastgelegd.

We geven een beeld van het verloop van het eksperiment op de ontwerpschool (Dr. W. Dreesschool te Arnhem).

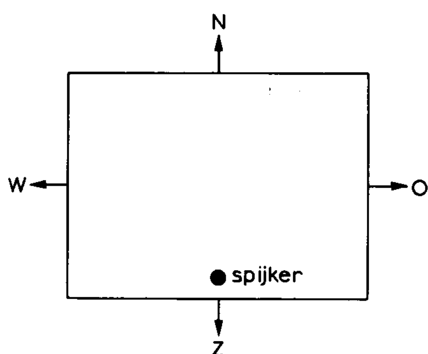


Fig. 11.



Foto 5: Met z'n allen op weg naar de observatieposten.



Foto 6: (Kompas op de plank geplakt!) 'Staat alles goed? Hoe leggen we de schaduw vast? We schrijven de tijd erbij!'



Foto 7: Een gewichtig moment. De eerste schaduw wordt vereeuwigd!



Foto 8: Nadat we een paar keer met de hele klas geweest zijn, kunnen de waarnemingen wel door een tweetal kinderen gedaan worden. Er zijn inmiddels wel belangrijke zaken gekonstateerd en verklaard, zoals bijvoorbeeld: De schaduw draait en wordt steeds korter. Dit komt omdat de zon steeds hoger aan de hemel komt en draait. (We redeneren immers vanuit aards standpunt!)



Foto 9: De zon heeft zijn hoogste stand gehad. Inmiddels zijn al flink wat waarnemingen gedaan. We moeten nog maar eens even met de hele groep gaan kijken en verklaren, waarom de schaduwen nu weer steeds langer worden.



Foto 10: Het dageksperiment zit er bijna op. De schaduwen zijn vastgelegd en de tijden erbij geschreven. Met behulp van de vastgelegde gegevens kan nu verder gewerkt worden.

Opdracht voor de lezer:[1]
Probeert u eens het verloop van de zonneschaduwen te beschrijven. Doen de verschillende jaargetijden er nog iets toe?
Mogelijk ontdekt u hierin een stukje meetkunde-onderwijs op een (heel wat) hoger nivo.

[1] Indikatie voor de oplossing: Foto 11.

Hoewel we de overtuiging hebben, dat alle kinderen begrepen hebben waar het om ging, wat er gebeurde en waarom dit zo was, hebben we met elkaar het volgende model (Foto 11) nog eens bekeken.

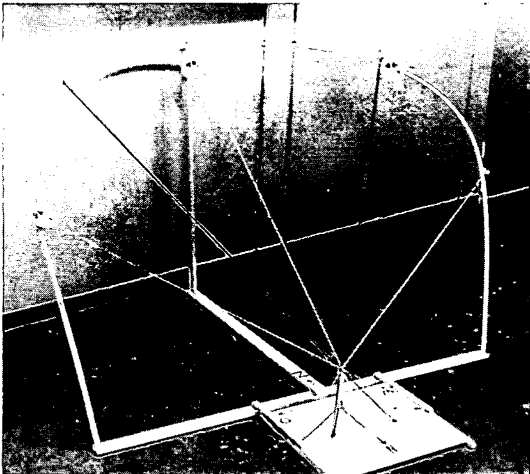


Foto 11.

De 'zon' beweegt zich langs een p.v.c.-buis van cirka 3 meter en produceert bij de stok op de plank (30 cm bij 40 cm) schaduwen (stralen voorgesteld door touwen). Het geheel wordt in balans gehouden door enkele latten.
(N.B. De gebogen p.v.c.-buis zou feitelijk de vorm van een gedeelte van een cirkel moeten hebben, maar het is niet eenvoudig dit met het gegeven materiaal ideaal te realiseren.)

5 Grafieken.

Werkblad 4

	TIJD	SCHADUWLENGTE	HOOGTE IN GRADEN
OPKOMST			
	9.00		
	10.00		
	11.00		
	12.00		
	13.00		
	14.00		
	15.00		
	16.00		
ONDERGANG			

Fig. 12.

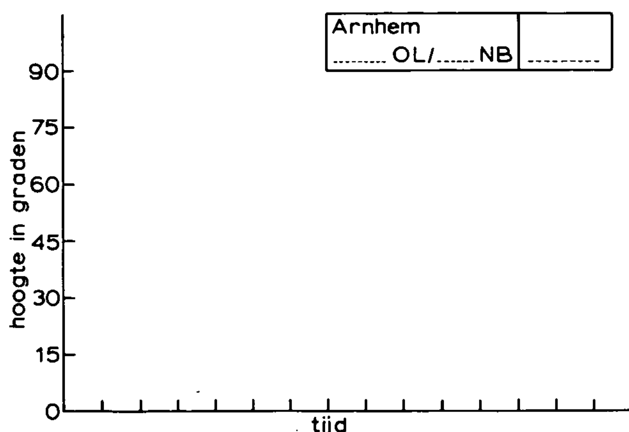


Fig. 13.

Van de plank waarop de schaduwen gedurende een dag zijn vastgelegd, nemen we de gegevens over in de tabel op werkblad 4.
Met behulp van de lengte van de schaduwstok en de lengte van de schaduwen kan nu telkens voor de tijdstippen, waarop de waarnemingen gedaan zijn, de hoogte van de zon in graden uitgedrukt worden, door van elk van die tijdstippen een driehoek te produceren als bij opdracht 3 op werkblad 3 en de juiste hoek te meten met de gradenboog.
Als we eenmaal zover zijn, kunnen de kinderen een grafiek samenstellen (werkblad 4), waarbij de hoogte van de zon, uitgedrukt in graden, afgezet wordt tegen de tijd (een soort afstand-tijd-grafiek dus).

We laten de kinderen ten slotte ook nog enkele grafieken zien, waarbij het gaat om het redeneren naar aanleiding van die grafieken.

Bijvoorbeeld:

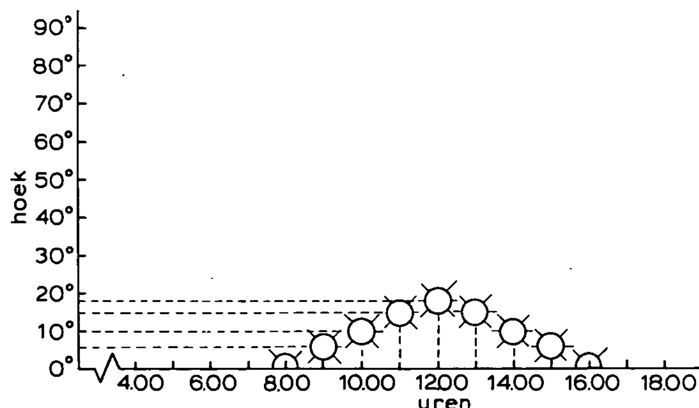


Fig. 14.

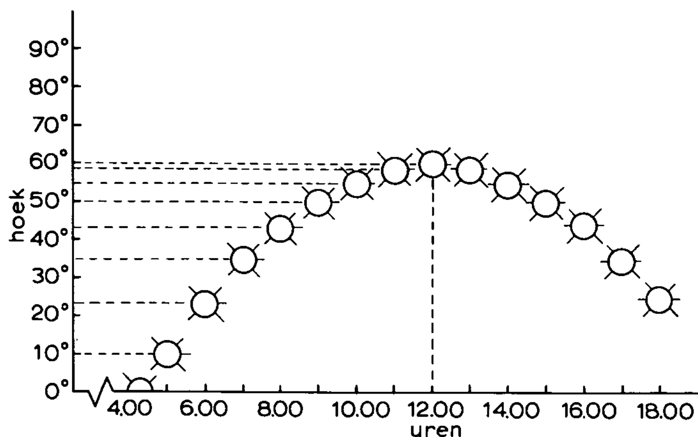


Fig. 15.

'Als je weet, dat deze beide grafieken voor Nederland zijn, wat kun je er dan van zeggen?'

1 (Kort daglicht, de zon komt niet hoog, dus het is winter.)

2 (Lang daglicht en de zon komt wel hoog, dus het is zomer.)

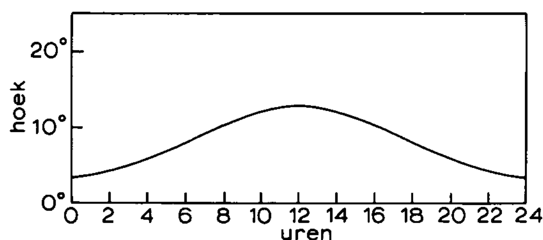


Fig. 16.

3 Voor welke plek op aarde zou deze grafiek kunnen zijn?
(Het is 24 uur van de dag licht, maar de zon blijft erg laag. Dit zal wel aan de noordpool zijn, als het daar zomer is.)

4 En deze grafiek?

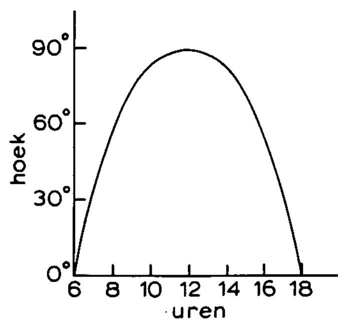
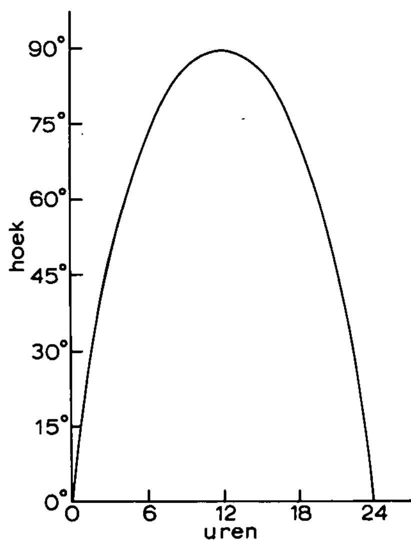


Fig. 17.

(Het is precies 12 uur licht en 12 uur donker. Om 12.00 uur staat de zon loodrecht (90°!) boven die plaats. Dat moet wel ergens aan de evenaar zijn.)

5 Wat zeg je hiervan?



- □ 24 uur zon, dat kan, bijvoorbeeld aan de noordpool;
- □ de zon 90° hoog kan ook, bijvoorbeeld aan de evenaar;
- □ maar beide verschijnselen op dezelfde plaats is onmogelijk.

Fig. 18.

4 Slotopmerkingen.

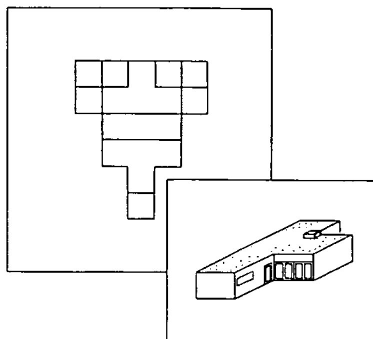
Met de voorgaande grafieken sluiten we deze bijdrage af.
Afstand-tijd-grafieken spelen in het vervolg van het genoemde tema een belangrijke rol. Daartoe is vanuit de beschreven eksperimenten en de wijze, waarop de verzamelde gegevens verwerkt zijn, een aanzet gemaakt.
Blijft ten slotte nog te vermelden, dat het entousiasme van de kinderen bij dit gedeelte van het tema groot was.
Belangrijker is in feite de vaststelling, dat het idee van gelijkvormig vergroten (of verkleinen) en van de parallelprojektie heel doorzichtig voor de kinderen was. De zaak is nu dit idee verder uit te diepen en dienstbaar te maken voor het onderwijs in hiermee verwante leerstofgebieden (bijvoorbeeld verhoudingen, breuken, procenten).

Opgave 6:
A, B, C en D zijn de hoekpunten van een vierkant.
Wat is het kortste wegennet tussen A, B, C en D?

D • • *C*

A • • *B*

Nog zonder kop of staart



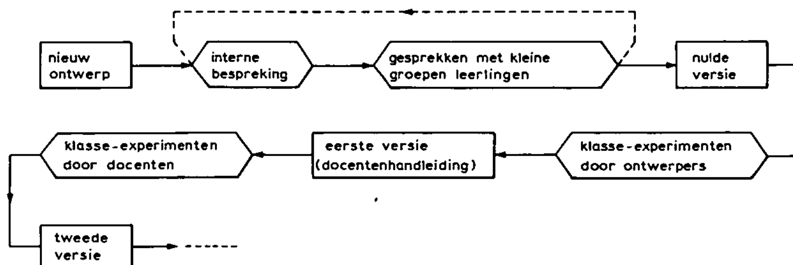
WIM KREMERS en JOHN PHILIPS
I.O.W.O. architect
Heteren Rosmalen

Nulde versie van een stukje wiskunde-onderwijs geinspireerd door 'de brochure'.

Na het schrijven van de I.O.W.O.-brochure: 'Wiskunde l.b.o., startpunt leerplanontwikkeling' is de groep van het I.O.W.O. die zich in het bijzonder richt op het wiskunde-onderwijs aan 12 tot 16 jarigen nog nauwelijks met meetkunde bezig geweest. Wel hebben we zo langzamerhand een wat duidelijker idee gekregen over de eisen die we willen stellen aan problemen die we de leerlingen voorleggen:

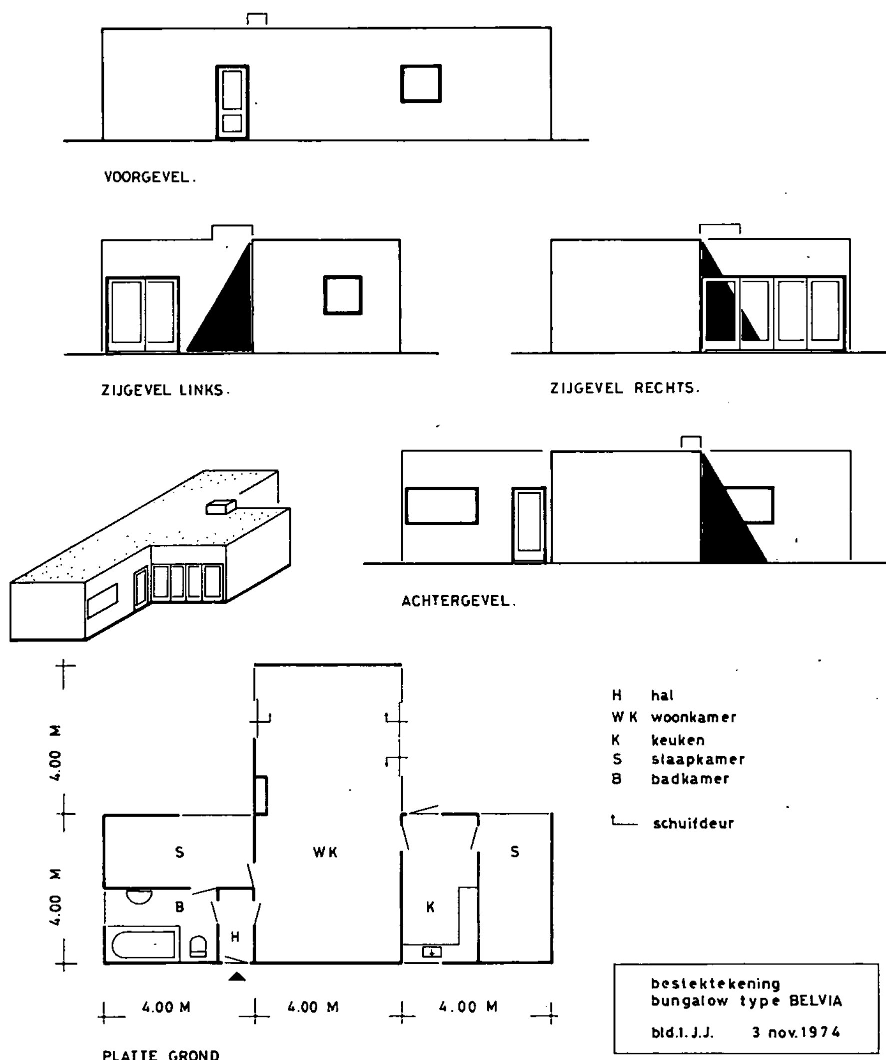
1. het probleem moet aansluiten bij de *belevings- of ervaringswereld* van de leerling. Hij moet zich persoonlijk bij het onderwerp betrokken voelen: het probleem dient vooral zijn probleem te worden.
2. de leerling dient door het probleem *aktief* bij het onderwijs betrokken te worden: wiskunde leren geschiedt door wiskunde te doen.
3. het moet een *rijk* probleem in een *rijke* kontekst zijn, d.w.z. dat het op verschillende nivo's oplosbaar is en de leerling er toe brengt zijn eigen subproblemen te stellen en op te lossen. Bovendien moet het aanleiding geven tot fundamentele wiskundige aktiviteiten.

In de leerstofvakken grafische verwerking en meten hebben we enige ervaring hiermee opgedaan. Misschien voldoet een uitgewerkte versie van de volgende serie problemen aan deze drie eisen. We hebben het gevoel dat het er in zit. Wat aan een dergelijk projekt vooraf moet gaan weten we nog niet precies, ook het vervolg is nog niet helemaal duidelijk.
Natuurlijk ligt dan de vraag voor de hand waarom we dan toch met zo'n stuk komen. We willen u in dit artikel een indruk geven van wat en hoe wij ontwerpen. Uw reakties hierop kunnen een waardevolle aanvulling zijn op de procedure die wij binnen onze groep tot nu toe hebben gevolgd bij het ontwikkelen van een stuk leerstof:



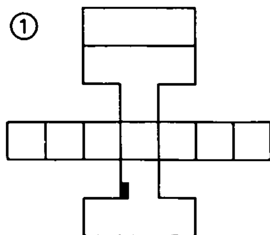
Bij de volgende serie opdrachten kan de vraag gesteld worden of er niet te weinig is terug te vinden van de zaken die tot nu toe bij het meetkunde-onderwijs centraal hebben gestaan. We komen daar straks nog even op terug. Ook veel andere vragen zouden gesteld kunnen worden, maar laten we maar eens gaan kijken.

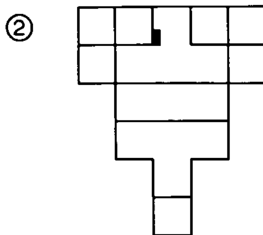
De familie A. N. Lewieks heeft een stuk grond gekocht in het rekreatiegebied van de gemeente Elnes. Zij willen daar een aantal vakantiebungalows op laten bouwen.
Architekt Flip Wilkers maakte een ontwerp dat hij Belvia genoemd heeft. *1

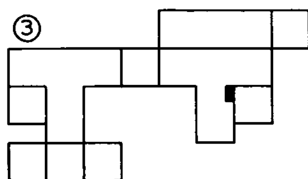


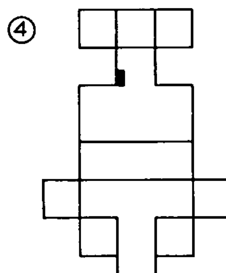
OPDRACHTEN (I)	Een model van Belvia.

► 1. Van welke van de hieronder getekende uitslagen kun je deze vakantiebungalow vouwen? *2

①


②


③


④


Kontroleer je antwoorden door de uitslagen uit te knippen en te vouwen.
Teken, samen met de andere leden van je groep nog een aantal uitslagen van deze vakantiebungalow.
Hoeveel verschillende uitslagen zijn er door de leerlingen van je klas gevonden? *3

► 2. Maak, bijvoorbeeld van karton, een makette van dit huisje.

► 3. Vul de volgende tabel in:

	lengte w.k.	oppervlakte w.k.	inhoud w.k.
bestektekening	6 cm		
makette			
werkelijkheid	8 m		

Als je de schaal van je makette tweemaal zo groot gekozen had, zou de lengte van de woonkamer in die makette dan ook tweemaal zo groot geweest zijn? En de oppervlakte? En de inhoud? *4

Opmerkingen:

*1 Een nivodifferentiatie kan hierbij worden aangebracht door de perspektieftekening weg te laten.

*2 Door andere uitslagen te kiezen of door de uitslagen meer het karakter van een bouwplaat te geven – bij kniplijnen een schaartje tekenen en vouwlijnen stippelen – kan deze opdracht eenvoudiger aangeboden worden. Anderzijds kan ook gevraagd worden deuren en ramen in de uitslag op de juiste plaats aan te geven en kan worden nagegaan welke uitslag het meest geschikt is om er een bouwplaat van te maken, rekeninghoudend met plakstrookjes en de éénzijdige bedrukking van zo'n plaat.

*3 Het aantal mogelijkheden kan bijvoorbeeld beperkt worden door de eis op te nemen dat na het uitknippen langs de buitenste lijnstukjes er niet meer geknipt mag worden.

*4 Het tekenen van grafieken van de lengte, de oppervlakte en de inhoud van de woonkamer als funktie van de schaal (of eenvoudiger oppervlakte en inhoud als funktie van de lengte) zou hieraan gekoppeld kunnen worden.

5 Natuurlijk kan hierbij ook het rekenaspekt naar voren gebracht worden. Aan de hand van een eenvoudige materialenstaat – het kan op een halve bladzijde – en een prijskaart van een handel in bouwmaterialen kan een eenvoudige berekening van de kosten aan bouwmaterialen gemaakt worden.

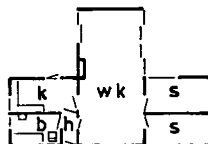
De afdeling bouw- en woningtoezicht van de gemeente Elnes keurt het ontwerp van de architekt op één punt af. Deze afdeling is namelijk van mening dat de natte ruimten (keuken en badkamer) aan elkaar grenzend behoren te zijn. Voor de rest gaat zij met het ontwerp akkoord. De architekt heeft de tekeningen die nodig zijn voor het aanvragen van een bouwvergunning het snelst klaar als hij er in slaagt aan dit bezwaar tegemoet te komen zonder zijn ontwerp drastisch te wijzigen.

OPDRACHTEN (II)	Een gewijzigd ontwerp Belvia.
► 1. Maak een nieuwe plattegrond voor deze vakantiebungalow waarbij de badkamer en de keuken aan elkaar grenzen. Hierbij moet je rekening houden met: i de T-vorm van het vakantiehuisje mag niet gewijzigd worden. ii de vorm, de oppervlakte en het aantal vertrekken van de woning blijft onveranderd. iii in elk vertrek moet daglicht binnen kunnen blijven treden. *1	
► 2. Maak bij je plattegrond ook de tekeningen van de vier gevels.	
► 3. Pas je makette bij het nieuwe ontwerp aan. *2	

Opmerkingen:

*1 Door het aanbieden van geschikt gekozen hulpmiddelen kan deze opdracht sterk vereenvoudigd worden. In feite kan het probleem teruggebracht worden tot het op een geschikte manier leggen van een puzzel van zes stukjes in de T-vorm.

*2 Een klassegesprek zou de afronding van deze opdracht kunnen zijn.
Gemakshalve zullen we bij de volgende opdracht aannemen dat de hiernaast getekende oplossing als 'klasontwerp' uit de bus gekomen is.



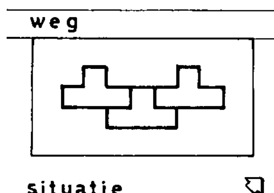
3 Aan deze serie kunnen veel opdrachten toegevoegd worden. Denk, om er maar eens één te noemen, aan de elektriciteitsleidingen met zijn minimaliseringsproblemen (oplosbaar m.b.v. uitslagen) en zijn toepassingsmogelijkheden van de stelling van Pythagoras.

De vakantiebungalows zullen in groepen van drie aan elkaar gebouwde huisjes op het bouwterrein gezet worden. Bij het schakelen van zo'n drietal moeten de bouwkosten natuurlijk zoveel mogelijk gedrukt worden. Zo is het bijvoorbeeld van belang dat de natte ruimten van drie geschakelde woningen aan elkaar grenzend gebouwd worden, omdat je dan o.a. met één centrale afvoer van het rioleringsnet kunt volstaan. Vandaar dat de architekt bij zijn ontwerp verschillende typen nodig heeft. We spreken van een ander type Belvia als de onderlinge ligging van de vertrekken veranderd is. De vorm, oppervlakte en het aantal vertrekken is hierbij weer niet gewijzigd.

OPDRACHTEN (III) Variaties op Belvia.

► 1. Op de plattegrond van Belvia zijn drie gedeelten te onderscheiden: de twee slaapkamers (een vierkant), de hal, badkamer en keuken (net zo'n vierkant) en de woonkamer (twee van deze vierkanten). Hoeveel verschillende typen kun je met je groep vinden door alleen maar deze drie gedeelten te verwisselen? Binnen zo'n gedeelte is het wel toegestaan om de plaats van een vertrek te veranderen. Teken van elk type een plattegrond en ga na welke nadelen er eventueel voor de toekomstige bewoners van zo'n type zullen zijn (b.v. dat ze via de keuken van de hal naar de kamer moeten). *1

► 2. Eén mogelijkheid om drie van deze woningen te schakelen is hiernaast getekend. Welke indeling zou je deze drie woningen geven.
Maak hierbij gebruik van de typen die je bij ► 1. gevonden hebt en houd rekening met de voorwaarde dat de natte ruimten van de drie woningen aan elkaar moeten grenzen.



► 3. Teken nog een aantal mogelijkheden om drie van deze woningen te schakelen. Aan welke schakeling geeft je groep de voorkeur? Waarom?

Opmerkingen:

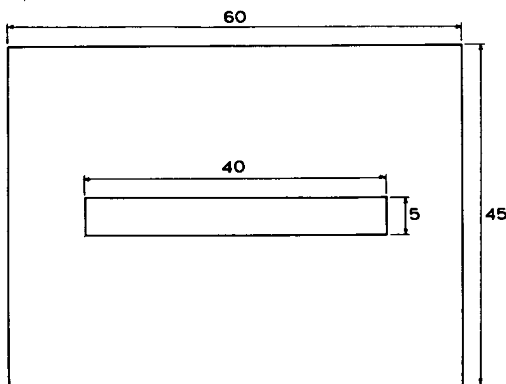
*1 Ook dit probleem is op een aantal manieren eenvoudiger toegankelijk te maken. Men kan bijvoorbeeld de vertrekken van deze drie gedeelten uit karton, laten knippen, waarbij elk gedeelte zijn eigen kleur heeft.
Bij deze opdracht is het niet noodzakelijk om op de plaatsing van ramen en deuren in te gaan.

2 Een mogelijk vervolg en afsluiting van deze serie opdrachten zou het probleem van de situering van zoveel mogelijk huisjes op het bouwterrein kunnen zijn. Door een aantal beperkende voorwaarden op te nemen (bereikbaarheid van de woningen, oppervlakte tuin, etc.) is zo'n opdracht wel in de hand te houden. Ook op deze plaats kunnen weer een groot aantal problemen toegevoegd worden. Zo kan verondersteld worden dat de vakantiebungalows in vier blokken van drie woningen op het terrein gebouwd worden en dat ze op een centraal antennesysteem zullen worden aangesloten, waarvan de mast op het middenplein staat. In verband met verlies aan signaal is het van belang dat de som van de lengten van de vier kabels die nodig zijn om de vier blokken met de antennemast te verbinden, minimaal is. Wat is – bij een gegeven situatieschets – de gunstigste plaats voor die mast?

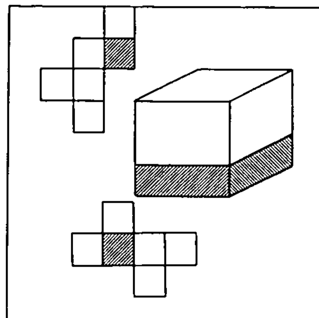
Bij dit project zullen leerlingen, voornamelijk nog impliciet, een aantal fundamentele zaken uit de meetkunde ervaren. Ruimtelijke oriëntatie, oppervlakte en inhoud, transformaties en projecties zijn daar voorbeelden van. Maar het biedt eventueel ook toepassingsmogelijkheden en aanknopingspunten voor de meetkunde-van-nu.
Deze wat intuïtieve opzet kan in een later stadium en misschien voor een kleinere groep leerlingen aanleiding geven tot een diepgaander matematische bespreking van de aangesneden onderwerpen.
We hebben al opgemerkt dat het stuk in deze vorm nog niet rijp is om er de klas mee in te gaan. Dat neemt echter niet weg dat we nu al erg geïnteresseerd zijn in uw reakties. Als het u wat lijkt of als u een leuke uitwerking of aanvulling bij een of andere opdracht ziet, laat het ons dan even weten. Ook als u hier wat minder positief tegenover staat zijn wij benieuwd naar het waarom daarvan.
Reakties gericht aan het I.O.W.O. (antwoordnummer 1566 t.a.v. Wim Kremers) komen zeker op hun plaats terecht.

Opgave 7.

Gevraagd het stuk hout met gleuf, zoals hiernaast afgebeeld, in twee stukken te zagen, die samengevoegd kunnen worden tot een vierkant.



De kubus in de brugklas



E. DE MOOR

Amsterdam

Onlangs hoorde ik, dat een leraar van een brugklas van een school voor V.O., waar men de 'Schotse Metode' gebruikt, alle vraagstukken over kubus, balk, cilinder etc. had overgeslagen. 'Daar is geen tijd voor!', was het argument. Ik weet niet onder welke omstandigheden dit gebeurd is en ik mag uit een enkel voorbeeld geen konklusies trekken, maar toch heb ik het gevoel, dat de meetkunde sinds de invoering van het nieuwe programma, nog stiefmoederlijker behandeld wordt dan de inhoud van het programma aangeeft.
Nog twee jaren heb ik het onderwijs volgens dit programma gegeven en ik heb het idee, dat er juist nu tijd is en ook veel mogelijkheden zijn tot het bedrijven van 'informele' meetkunde.
Ik kies als voorbeeld de kubus en som een aantal aktiviteiten op, die alleen al met dit lichaam gedaan kunnen worden. Geenszins pretendeer ik volledig te zijn, noch origineel (de meeste vraagstukken zullen bekend zijn) en ook wil ik geen systematische opbouw beogen. Wel meen ik, dat de problemen voorbeelden zijn van meetkunde-aktiviteiten, waaraan leerlingen, leraren (en ouders) door hun uitnodigende karakter veel plezier kunnen beleven en daarbij nog heel wat wiskunde leren. Dat de problemen soms wat onrealistisch lijken, mag geen beletsel zijn, immers de praktijk leert, dat de gefantaseerde wereldjes als in 15 en 16 geen enkele remmende invloed op de motivatie hebben. De problemen zijn verschillend van moeilijkheidsgraad en ook binnen de problemen zelf kan differentiatie optreden.

***

1 We hebben geen papier en potlood, bord en krijt.
'Teken' met de handen een imaginaire kubus in de lucht. Benoem de hoekpunten en laat een kind vragen beantwoorden als: 'Snijdt de lijn *AG* de lijn *BH*?' 'Welke hoek maken de vlakken *ABGH* en *ABFE*?' 'Hoeveel ribben zijn er?' 'Is *FD* een symmetrie-as?' etc. etc. ... Het zal blijken, dat we behoefte hebben aan een model van de kubus of tenminste een tekening.

2 Het maken van een draadmodel kan tijdens de handvaardigheidslessen uitgevoerd worden. Hoe doe je dat het handigst met een gegeven stuk draad? Zo kunnen ook kartonnen modellen gemaakt worden, waarvan de mogelijke

bouwplaatjes tijdens de wiskundeles gezocht kunnen worden. Goede leerlingen van een brugklas zijn in staat om zelfstandig alle 11 essentieel verschillende bouwplaatjes te vinden (zie ook Euclides 49; 1, recreatie 298). En onlangs brachten 5e klassers van een basisschool dit probleem tot een goed einde (zie Wiskobas-Bulletin 3; 6). Kun je beredeneren, dat je precies 7 plakranden nodig hebt? Welke van de gevonden netwerken kunnen door 'afrollen' gevonden worden?

3 Wie denkt, dat het onder 2 genoemde te veel moeilijkheden oplevert, kan de bouwplaatjes van een kubus zonder deksel laten maken. Het systematisch werken met alle pentomino's kan tot de oplossing leiden, waarbij begrippen als direkt- en spiegel-kongruent, draaiing en spiegeling al doende ontdekt worden. Zogenaamd waardeloos verpakkingsmateriaal als gebruikte melkkartonnetjes kunnen hierbij van nut zijn.

4 Het tekenen van een kubus geeft aanleiding tot de wijzen van afbeelden als parallelprojektie en perspektief. Ik heb vroeger heel fijn samengewerkt met de tekenleraar. Ook het Schlegeldiagram (fig. 1) en de uitslag behoren tot de

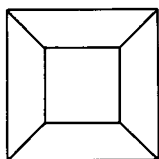


Fig. 1.

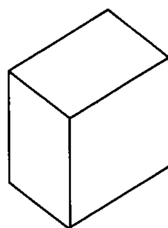
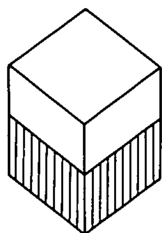


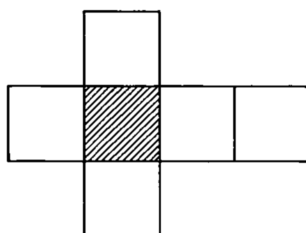
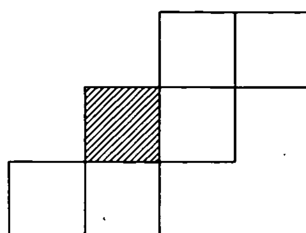
Fig. 2.

visualiseringen. Hoe ziet een kubus eruit als je langs de lichaamsdiagonaal kijkt? Geeft ieder drietal lijnstukken vanuit één punt afgezet een afbeelding van een kubus? Ieder kent de optische misleidingen, zoals in figuur 2. Kijk je daar bovenop een kubus of naar de hoek van het plafond in de kamer?
Maak de kinderen ook eens attent op het gebruik van de kubus in de architektuur, beeldhouwkunst en grafische kunst. Ik noem als voorbeelden de kunstenaars Escher en Vasarely. Voor (goede) leerlingen schaduwproblemen.

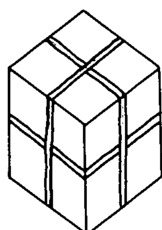
5 Telproblemen als: 'door elk hoekpunt gaan 3 ribben, er zijn 8 hoekpunten, waarom geen 24 ribben?' zijn bekende, doch uiterst nuttige opgaven.
Laat een zwartgeverfde kubus eens doorzagen, zodat 8, 27, 64 etc. kubusjes ontstaan. Hoeveel zaagsneden moet je telkens aanbrengen? Hoeveel kubusjes hebben respektievelijk 3, 2, 1 of 0 geverfde zijvlakken?
Laat bij een gegeven aantal kubusjes, zeg bijvoorbeeld 20, alle mogelijke rechte blokken bouwen en steeds de bijbehorende oppervlakte bepalen. Ontbinden in faktoren is hier de strategie.

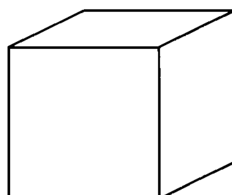
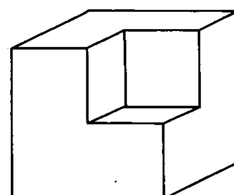
6 Een kubus is voor de helft in de zwarte verf gedompeld (fig. 3). Maak uitslagen als gegeven in fig. 4 af. Het ondervlak is al ingekleurd. Hierop zijn 66 variaties te maken.


Fig. 3.



Fig. 4.

7 Een houten kubus is in een kartonnen doos gepakt met touw erom heen als afgebeeld in fig. 5. Voor een andere houten kubus hebben we 5 maal zoveel


Fig. 5.



Fig. 6.

touw nodig. Hoeveel maal zoveel karton hebben we nu nodig en hoeveel maal zo zwaar is het pak? Het probleem kan gegeneraliseerd worden en in verband gebracht worden met biologische problemen. Waarom kan bijvoorbeeld een mens die 10 maal zo groot zou zijn als een normale volwassene niet meer lopen? Het vergelijken van lichamen met gelijke oppervlakte doch verschillende inhoud blijkt voor velen verrassend te zijn (zie fig. 6).

8 Aan een konkreet model kunnen de 9 symmetrievlakken, de 13 symmetrieassen en het punt van symmetrie gevonden worden.

9 Geef de kinderen een dicht model van een kubus en een liniaal en als opdracht de lengte van de lichaamsdiagonaal op te meten. Een oplossing is afgebeeld in fig. 7, waarin de kubus vanuit de hoek van een tafel éénmaal opgeschoven is. Zijn de kinderen daar al aan toe, dan kan de lengte ook (op schaal) gekonstrueerd en als ze Pythagoras kennen ook nog berekend worden. Natuurlijk alle antwoorden vergelijken.

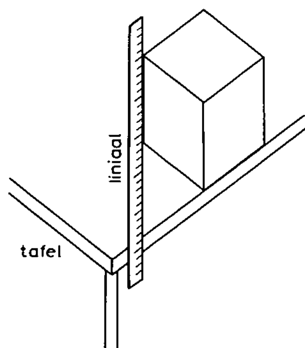
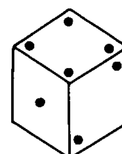
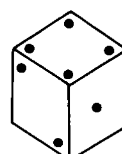


Fig. 7.



Fig. 8.

10 Hoeveel essentieel verschillende dobbelstenen bestaan er?
De enige twee mogelijkheden ziet U afgebeeld in fig. 8. Je hebt geen wiskundige routine nodig om dit te beredeneren, maar een belangrijke wiskundige denkwijze zoals: 'op welk overliggend paar zijvlakken die 'één' en 'zes' staan' doet niet ter zake.

11 De dobbelsteen biedt vele mogelijkheden, zoals uit fig. 9 moge blijken.

uitgangs positie	welke posities zijn bij doordraaiing mogelijk?

Fig. 9.

12 Bij het maken van een uitslag van een 'foto' van een dobbelsteen (fig. 10) moet je oppassen.
Ook hier zijn weer veel variaties mogelijk.

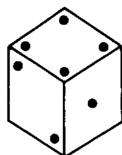


Fig. 10.

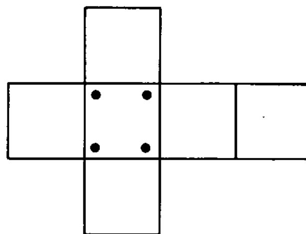


Fig. 11.

13 Hoeveel verschillende foto's kun je van een dobbelsteen maken?
Verschillende oplossingsstrategieën zijn: als je hem op één vlak zet, kun je vier keer draaien, dus 6×4.
Of kijk naar de 8 hoekpunten waar elke keer 3 keer cyklisch gewisseld kan worden, dus 8×3.

14 Kun je een bol in een kubus verpakken, zodat hij niet rammelt? Hoe groot is de straal? En als hij in een draadmodel geperst wordt? En de kubus in de bol? In hoeveel delen wordt de ruimte verdeeld door een bol en een kubus?

15 Een mier zit in hoekpunt *A* en wil langs de ribben via de kortste weg naar *G* (fig. 12). Hoeveel routes kan hij kiezen? Op hoeveel manieren kan dat? En hoeveel verschillende routes *A-G-A* zijn er? ($6 \times 6 = 36$). Als hij wel over de

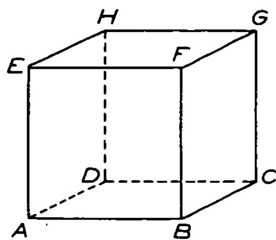


Fig. 12.

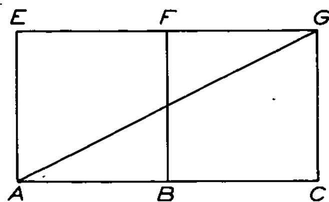


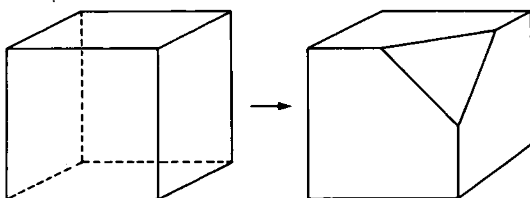
Fig. 13.

zijvlakken mag, dan geeft de driehoeksongelijkheid het overtuigend bewijs, dat hij via het midden van een ribbe moet (fig. 13). De lengte van de route kan weer geschat, gemeten, gekonstrueerd, berekend en benaderd worden.
Op dit probleem zijn vele variaties mogelijk. (Denkt U eens aan een rondgang!)

16 De wandelende mier kan ook tot uitstapjes in de topologie leiden. Kan hij een reisje langs alle ribben maken zonder één ribbe meer dan éénmaal langs te reizen? Het Schlegeldiagram (fig. 1) biedt de beste oplossingsstrategie. Een dergelijk vraagstuk heeft mijns inziens echter alleen zin als de kinderen kunnen inzien dat zo'n graf niet meer dan 2 oneven knooppunten mag bezitten. Dit kan induktief redenerend gevonden worden.
Laten we de mier echter de zijvlakken doorlopen en moet hij elke ribbe precies éénmaal overschrijden (een zijvlak mag meerdere malen aangedaan worden), dan is een dergelijk reisje wel uitvoerbaar.
Het ontdekken van de duale lichamen achtvlak en kubus zou geweldig zijn.

17 Met 3 kleuren kun je een kubus verven, zodat geen twee gelijkgekleurde vlakken een ribbe gemeen hebben.
Hierop zijn weer vele variaties te bedenken. Probeert U bijvoorbeeld maar eens te bewijzen, dat je 30 essentieel verschillende kubussen kunt maken met 6 verschillende kleuren (niet gemakkelijk!).

18 In veel boekjes over moderne wiskunde treffen we de volgende vraagstukkenreeks aan. Gegeven een aantal konvekse ruimtefiguren, tel bij ieder lichaam het aantal vlakken (V), het aantal ribben (R) en het aantal hoekpunten (H), waarna het de bedoeling is, dat uit deze voorbeelden de formule van Euler: $V-R+H=2$ ontdekt wordt. Ik heb hier niets op tegen, maar ik meen dat dit ten onrechte induktief redeneren wordt genoemd. Je kunt het hooguit een soort intuïtief redeneren noemen.
Toch kan van de formule een grotere overtuigingskracht uitgaan door het volgende 'schaafbewijs', dat op het voorgaande zou kunnen volgen. Zie hiertoe fig. 14, waar in de linkerfiguur geldt $Z-R+H=2$, terwijl de rechter (na schaven) oplevert: $Z'-R'+H'=(Z+1)-(R+3)+(H+2)=2$.


Fig. 14.

Met dit schaven kun je voortgaan, hetgeen wel een induktieve werkwijze is. Je kunt bijvoorbeeld ook van een viervlak uitgaan en dit afschaven tot een kubus.

19 Een doorzichtige kubus (perspeks) met vloeistof gevuld, kan ons schitterend doorsnijdingen laten zien. Kan je als doorsnijding een driehoek krijgen? Wat kun je over zo'n driehoek zeggen? Dit kan ook uitgevoerd worden met touwtjes en een model of tekenen. Zo ook met vierhoeken. Noem van deze vierhoeken de kenmerkende eigenschappen. Klassificeer ze. Kan je bij doorsnijding ook een vijfhoek, een zeshoek krijgen? Waarom nooit een zevenhoek?

20 Een schitterend voorbeeld van werken met de kubus in de brugklas vind ik de toepassing met het ruitentwaalfvlak (Van Hiele-Geldof). (Fig. 15). In

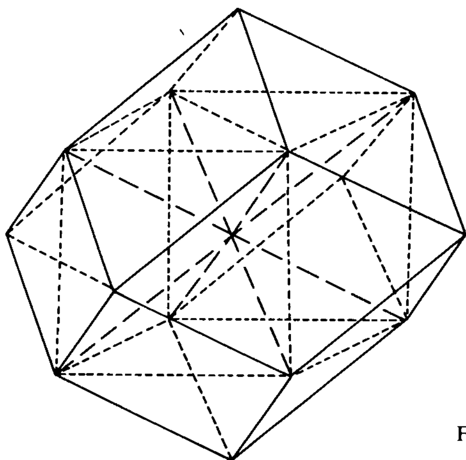


Fig. 15.

hoeveel 4-zijdige piramides wordt de kubus door de 4 diagonalen verdeeld? Wat is de inhoud van deze piramides? Plaats de zes piramides buitenwaarts op de kubus. Nu aantonen, dat er een twaalfvlak ontstaat, waarvan de zijvlakken ruiten zijn. Bespreek de symmetrieën en vergelijk dit lichaam met de andere Platonische lichamen.

***

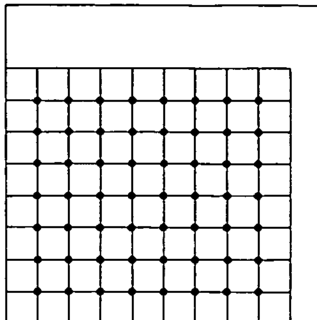
In ieder wiskundelokaal zou het Körperspiel van Bauersfeld (zie boekbespreking Euclides 50, 1 van Dr. Wansink) aanwezig moeten zijn, waarin het aantal mogelijkheden met de kubus nog verder wordt voortgezet. Voor andere lichamen als cilinder en kegel kunnen we ook dergelijke opgavenreeksen opsommen.
Het is heel goed mogelijk het gehele brugjaar met meetkundige aktiviteiten te vullen, zodat er dan 'geen tijd' meer zou zijn voor het algebraïsch aspekt van de wiskunde.

Ik zou zo ver niet willen gaan, maar ik wilde toch graag enig tegenwicht geven aan de stroming in ons onderwijs, welke in het begin van dit artikel is gesignaleerd.

Literatuur

1. H. Bauersfeld u.A. – 'Das Körperspiel mit Begleitschrift'. 1973. Schroedel, Hannover.
2. M. Walter – 'Boxes, Squares & Other Things'. 1971. Nat. Council of Teachers of Mathematics Washington, 1201, Sixteenth street.
3. A. Ehrenfeucht – 'The Cube made Intresting'. 1964. Pergamon Press, Oxford.

Een paar meetkundelessen



A. J. Th. MAASSEN

Arnhem

0. De redactie heeft mij uitgenodigd, in dit nummer een beschrijving te geven van een paar meetkundelessen.

Die uitnodiging heb ik dankbaar en gretig aanvaard: in § III treft u een beschrijving aan van een paar lessen: u vindt daar een paar werkbladen die in die lessen hebben gediend; in kleine letters zijn daar opmerkingen afgedrukt die mededeling doen over de reacties van leerlingen of over bedoelingen van de samensteller van de cursus waarin deze lessen zijn ingebed.

Achteraf beken ik die uitnodiging niet alleen gretig maar ook met grote overmoed te hebben aangenomen: de keuze van de lessen bleek niet gemakkelijk en de beschrijving van zomaar een paar lessen niet erg bevredigend; ik heb de verleiding méér te doen dan mij gevraagd is, niet kunnen weerstaan: in § I vindt u een ruwe schets van de didactische en wiskundige overwegingen die bij het samenstellen van de cursus hebben voorgezeten; moet ik mij daarvoor verontschuldigen?

In § II wordt een schets gegeven van de beginsituatie waarin u mag veronderstellen dat de leerlingen zich bevinden en van de feitelijk gebruikte werkvorm.

I. 1. Leerlingen van 12, 13 jaar kunnen nauwelijks worden gemotiveerd tot zgn. redeneringen waarin zij uit voor hen vanzelfsprekende zaken andere voor hen vanzelfsprekende zaken afleiden. Wie meetkunde onderwijst, zal er naar mijn stellige overtuiging naar moeten streven, de leerlingen zo spoedig mogelijk èn geregeld te brengen tot voor hen verrassende ontdekkingen. Vele van zulke ontdekkingen kunnen zij pas doen, als zij geleerd hebben nauwkeurig te tekenen; zij moeten ook eerst leren nauwkeurig te meten (met liniaal en gradenboog). Zij moeten nauwkeurig tekenend en metend verschillende gevallen onderzoeken; zij moeten er toe worden geprikkeld: wat zij ontdekt hebben of vermoeden, te willen *begrijpen* (of, als u liever wilt:) te beredeneren uit zaken die zij als vanzelfsprekend hebben ervaren. Dat nauwkeurig tekenen en meten brengt hen er heel geleidelijk toe, te ontdekken dat er een grens is voor *practische* nauwkeurigheid; het voert hen – tenminste dat mag je redelijkerwijs hopen – op de lange duur tot het inzicht dat de tekeningen die zij maken, niet meer zijn dan plaatjes van de ideale figuren die zij zich al tekenend denken; en zelfs – omdat zij verschillende gevallen tekenen – dat één zo'n

tekening een grote klasse van ideale figuren representeert die allemaal op zijn minst *die* eigenschappen hebben waaruit die ene verrassende eigenschap door redenering kan worden afgeleid. Dat inzicht veroveren zij pas op de lange duur, de een vlugger dan de ander.

Zó kan de studie van meetkunde voor hen een van die ervaringen zijn waarmee je ontdekt, dat een mens door op een verstandige manier al datgene dat hij als vanzelfsprekend accepteert, op een rijtje te zetten, tot ware uitspraken kan komen die de vanzelfsprekendheid te boven gaan; misschien is de meetkunde wel bij uitstek geschikt voor die voor alle mensen heel belangrijke les.

I. 2. Een zorgwekkend onderdeel van het meetkunde-onderwijs is de ontwikkeling van de taal: de naamwoorden en de predicaten waarmee de redeneringen kunnen worden geformuleerd. Die taal is onmisbaar; maar de ontwikkeling er van moet je achter laten lopen bij de ervaringen van de leerlingen, wil je verbalisme vermijden; de ontwikkeling van die taal laadt op wie onderwijst, de zorg zijn leerlingen er van te vrijwaren in de meetkunde slechts die taal te zien.

I. 3. In 'Mathematics as an Educational Task' beschrijft prof. Freudenthal hoe je, reflecterend op wat je zojuist hebt beredeneerd, een in principe oneindige rij van 'waarom?'-s kunt stellen. Wiskundigen plegen zulke rijen af te breken met de keuze van een stel axioma's.

Ik denk dat in deze tijd niemand in twijfel trekt dat je kinderen geen meetkunde leert door hun een uitgekiend stel axioma's te geven en hen uit te nodigen te gaan redeneren en hun redeneringen te baseren op dat stel axioma's. Het is wèl mijn overtuiging dat wie meetkunde onderwijst, er verstandig aan doet een stel axioma's aan zijn onderwijs ten grondslag te leggen; vooral dàn kan hij met grote zekerheid voor zichzelf en met grote helderheid voor zijn leerlingen consistent meetkunde-onderwijs geven: de exploraties door zijn leerlingen goed sturen en hen helpen die door redeneringen te bevestigen: al naar de behoefte van een leerling of van een groep leerlingen graaft hij van de onderliggende theorie zoveel op als nodig is; hij doet er bij de samenstelling van zo'n stel axioma's natuurlijk verstandig aan slechts als axioma's op te nemen: uitspraken die door kinderen worden geaccepteerd met (op zijn minst) 'ja, dat moet wel zo zijn'. Zo'n stel axioma's mag m.i. redundant zijn, de samensteller zorgt voor de consistentie er van.

Aan de cursus waaruit de lessen die in § III worden beschreven, genomen zijn, ligt een stel axioma's te grondslag dat op een m.i. acceptabele manier voldoet aan de zojuist geformuleerde verlangens.

Eén van die axioma's moet ik hier vermelden; het is het enige dat in de cursus uitdrukkelijk wordt afgesproken:

> 'Als een vierhoek in het platte vlak drie rechte hoeken heeft,
> dan heeft hij er vier'.

(De leerlingen hebben door een tekening op een pingpongballetje vastgesteld, dat je zo'n afspraak voor een boloppervlak beter niet kunt maken).

Andere axioma's worden niet afgesproken; er wordt wèl zorg aan besteed dat de inhoud van de meeste van die axioma's als 'vanzelfsprekend' door de leerlingen wordt ervaren (bijv: twee hoeken die je op elkaar kunt krijgen door het papier te vouwen, zijn even groot).

Met de leerlingen veel te laten meten, gedurende lange tijd, hoopt de samensteller de leerlingen gevoelig te maken voor de axioma's (afkomstig van Birkhoff en gepropageerd door Moise) die je losweg zó zou kunnen formuleren: 'we beschikken over een ideale maatlat en een ideale gradenboog'. Pas in het hoofdstuk over reële getallen kunnen de leerlingen greep krijgen op de volledige inhoud van die twee axioma's. In de hier bedoelde cursus wordt bovendien gerekend op een bij de leerlingen aanwezig geacht intuïtief idee van: er is een oppervlaktefunctie op de verzameling van veelhoekige gebieden.

I. 4. Ten slotte nog een opmerking omwille van de duidelijkheid.

Bij de samenstelling van de cursus wordt er bovendien naar gestreefd op daartoe geëigende momenten de leerlingen – uiteraard aanvankelijk op laag niveau – in aanraking te brengen met interessante wiskundige fenomenen. Een – zeker! weinig voor de hand liggend – voorbeeld daarvan treft u in III. 4. aan: in een van de lessen, bedoeld om de leerlingen te waarschuwen getekende figuren niet al te zeer te vertrouwen, treedt een rij van Fibonacci op. Later zou in lessen over combinatoriek het probleem van de konijnenparen kunnen worden besproken; nog later bijv. in het hoofdstuk over rijen, kunnen leerlingen de twee meetkundige rijen vinden die elk een rij van Fibonacci zijn; ten slotte kan in wiskunde II worden aangetoond dat die rijen van Fibonacci een tweedimensionale lineaire ruimte vormen waarvan dat tweetal meetkundige rijen een (voor de hand liggende) basis is: dáármee kunnen de leerlingen die wonderlijke formule vinden die de n^e term van zo'n Fibonacci-rij expliciet in n uitdrukt. Een op zichzelf boeiend onderwerp dat zeker niet te moeilijk is voor leerlingen met wiskunde I en II in hun pakket en dat hun blik op heel andere onderwerpen verruimt.

II. 1. De lessen van § III zijn genomen uit een hoofdstuk over rechthoeken, vierkanten, rechthoekige driehoeken, over oppervlakte en de stelling van Pythagoras. Dat hoofdstuk is geschreven voor de laatste paar weken van het brugjaar van een school voor Havo en Vwo.

II. 2. De brugklas heeft in de meetkundelessen een vrije (wel tamelijk constante) organisatie: er zijn een paar eenlingen; er zijn paren, drietallen en viertallen; er is tussen sommige groepjes (van 2, 3 of 4) frequent contact; er blijken – hoewel niet vaak – ook contacten over zo grote afstand te zijn dat er gelopen wordt; de leraar gaat rond van groepje naar groepje.

De concentratiegraad gedraagt zich op een wijze die elke ervaren leraar kent: zelden in de hele klas het gehele uur laag, zelden in de hele klas het gehele uur hoog; in elk van de meeste lesuren zijn er fluctuaties van de concentratie in elk groepje; er heeft 'resonantie' plaats en ook 'naijling'. Wel is gedurende een deel van elk lesuur de aandacht centraal gericht: er wordt samengevat of er wordt onder directe leiding van de leraar iets besproken of er wordt gemeenschappelijke controle uitgeoefend op reeds gemaakt werk.

II. 3. In het gehele jaar heeft de 'middelloodlijn van een puntenpaar' (of: 'van een lijnstuk') een belangrijke rol gespeeld: de middelloodlijn van $\{P, Q\}$ is de vouw in het papier waarmee je P en Q op elkaar kunt krijgen: aanvankelijk is er veel gevouwen; het handtastelijk vouwen om een lijn werd soms vervangen door in gedachten vouwen om die lijn; het vouwen om een lijn is later geworden: omklappen om die lijn. De leerlingen (worden verondersteld te)

weten dat

Voor elke rechthoek geldt:
elke van zijn hoeken is een rechte hoek;
de maat van elke van zijn hoeken = 90°;
zijn zijden die tegenover elkaar liggen, hebben dezelfde middelloodlijn;
zijn zijden die tegenover elkaar liggen, zijn even lang;
het snijpunt van zijn diagonalen is het midden van elke diagonaal;
er is een cirkel die zijn vier hoekpunten bevat;
het middelpunt van die cirkel is het snijpunt van de diagonalen.

III. 1. In de onmiddellijk voorafgaande lessen zijn aan de orde geweest: rechthoekige gebieden; hun oppervlakte en hun omtrek; herhaling van de zojuist genoemde eigenschappen van rechthoeken; en:

voor elk vierkant *ABCD*: $A \in$ middelloodlijn van $\{B, D\}$.

-140-

1e. *Beantwoord de volgende vragen (òf met JA, òf met NEE).*

Zijn de twee diagonalen van elke rechthoek even lang? . . . .

Staan de twee (dragers van de) diagonalen van elke rechthoek loodrecht op elkaar? . . . .

Zijn de twee diagonalen van elk vierkant even lang? . . . .

Is er een rechthoek waarvan de twee diagonalen hoeken insluiten waarvan er eentje 60° groot is? . . . .

Is er een vierkant waarvan de diagonalen hoeken insluiten waarvan er eentje 60° groot is? . . . .

Is er een vierkant waarvan de diagonalen niet even lang zijn? . . . .

Is er een rechthoek waarvan de diagonalen niet even lang zijn? . . . .

1f. *Welk van de volgende beweringen zijn WAAR? Welke zijn ONWAAR?*

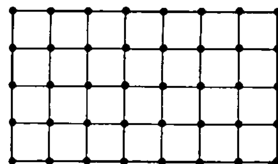
Er bestaat een rechthoek waarvan de (dragers van de) diagonalen loodrecht op elkaar staan. . . . .

Het is mogelijk van 6 (even lange) lucifers 4 regelmatige driehoeken te maken (waarvan elke zijde 1 lucifer lang is). . . . .

In elke rechthoek staan de (dragers van de) diagonalen loodrecht op elkaar. . . . .

Het is mogelijk van 12 (even lange) lucifers 6 vierkanten te maken (waarvan elke zijde 1 lucifer lang is). . . . .

1g. *Neem een blad zgn. roosterpapier.*
Je kunt daarvan rechthoekige gebieden nemen waarvan de rand geheel ligt op lijnen van het roosterpapier; hiernaast is er een getekend van 4 bij 7.

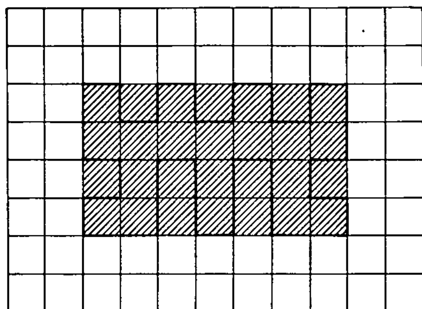
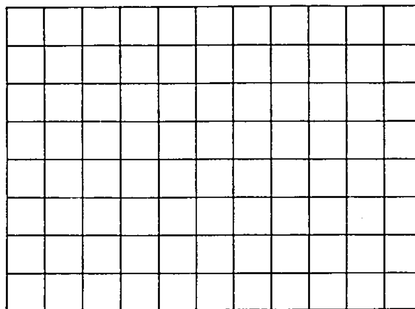


Hoeveel roosterpunten liggen BINNEN zo'n rechthoekig gebied van 4 bij 7? . . . .

Hoeveel roosterpunten liggen op de rand ervan? . . . .

Stel je een rechthoekig gebied voor van 327 bij 731.
Hoeveel roosterpunten zijn er die binnen dat gebied of op de rand ervan liggen?
Antwoord: . . . .

1h. In het rechthoekig gebied van 4 bij 7 dat hieronder staat, is een weggetje getekend
dat geheel op lijnen van het roosterpapier ligt,
dat in het zelfde roosterpunt eindigt als het begonnen is,
dat alle andere roosterpunten binnen of op de rand van het gebied precies één keer aandoet.
Je kunt veel meer van zulke weggetjes tekenen; doe het maar.
Hoe lang zijn al die weggetjes? . . . .
Kun je dat beredeneren? . . . .
Hoe groot is de oppervlakte van het gebied dat door zo'n weggetje wordt ingesloten? . . . .

Bij 1f (2e): een van de leerlingen roept: 'dat lukt niet op tafel: je moet er een paar in de lucht houden'. Dat blijkt een verhelderende opmerking: met vereende krachten komen de leerlingen er uit.
Bij 1f (4e) blijken sommige leerlingen het sein begrepen te hebben; ergens valt het woord 'kubus'; dat woord ritselt door het lokaal; sommige leerlingen kunnen het zich niet voorstellen: er moet een echte kubus aan te pas komen; dan (b)lijkt voor alle leerlingen alles in orde.
Bij 1g: de leerlingen moeten i.v.m. 1h inzien dat zo'n (gesloten) gebied van m bij n $(m+1)(n+1)$ roosterpunten bevat.
Bij 1h: dat de lengte van elk van die weggetjes 40 is, blijken de kinderen allemaal te weten; er zijn er die zoiets zeggen als: 'er zijn 40 punten; het weggetje van een punt naar het volgende is 1'; dat is een verstandige gedachte die gemakkelijk schijnt op te komen als je van een paar van die weggetjes de lengte door tellen vaststelt. De leerlingen komen er spontaan toe (het wordt op het werkblad niet gevraagd) te verklaren dat al die gebieden (ieder ingesloten door zo'n weggetje) dezelfde oppervlakte hebben; zij denken het te doen met: 'die weggetjes zijn toch allemaal even lang'. Ik weet van één leerling dat hij zich daartegen verzette; hij overtuigt zijn partners door een van de stukjes weg: rand-binnengebied-rand naar buiten te klappen: 'nou is de weg hetzelfde gebleven en het gebied groter geworden'. Op de een of andere manier is dat terecht gekomen bij andere (groepjes van) leerlingen: of omtrek en oppervlakte met elkaar te maken hebben, is kennelijk een probleem geworden.
(In de pauze die op de les volgde, hebben een paar leerlingen mij gevraagd of al die gebieden dezelfde oppervlakte hebben; die vraag heb ik met 'ja' beantwoord; dat ik daarvan geen beter argument kon geven dan: 'ik heb al die weggetjes getekend en vastgesteld dat die even grote gebieden insluiten' stelde hen danig teleur. Ik acht dat een belanrijke ervaring: waar zouden leerlingen het idee dat hun leraar elk wiskundig probleem kan oplossen, toch vandaan hebben? Moeten wij dat ongezonde idee niet bestrijden?)
III. 2. Blad 141 wordt hier niet opgenomen: er worden allerlei lengte-eenheden en de erbij behorende oppervlakte-eenheden genoemd: meter, duim, yard, voet, enz.; er wordt opgemerkt: '1 vierkante 2 cm = 4 vierkante cm'. enz. De bladen 142 en 143 worden hier opgenomen; bij 142 heb ik geen commentaar.

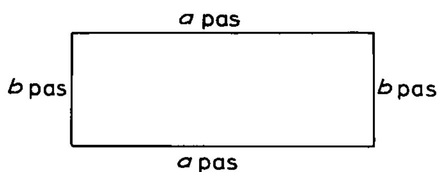
2b. Het volgende is je vast wel bekend:

Stel je voor: je KIEST een LENGTE-EENHEID;
het doet er niet toe welke: cm of km of voet, ...
het mag ook wel de lengte zijn van ZO MAAR een LIJNSTUK.

Laten we de lengte-eenheid die je gekozen hebt, een naam geven;
Laten we hem 'pas' noemen.

Stel je voor: je maakt een maatlat met pas als eenheid.
Je kunt dan met die maatlat van elke rechthoek de zijden meten.

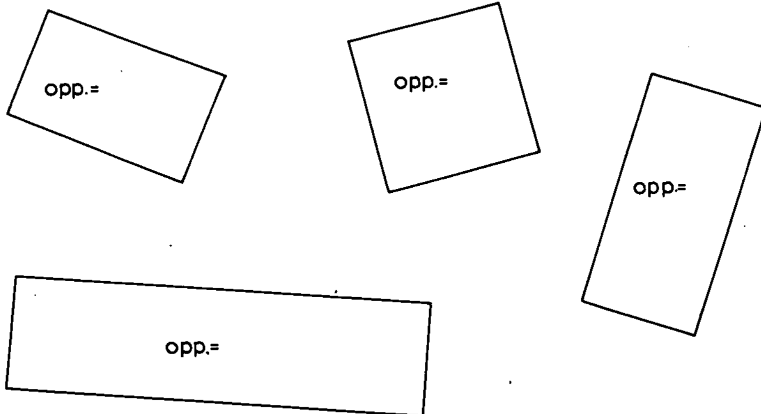
Stel je voor dat je bij een rechthoek als meetresultaat vindt:
a pas, *b* pas, *a* pas, *b* pas;



Dan is de OPPERVLAKTE van het GEBIED dat door die RECHTHOEK is INGESLOTEN

$a \cdot b$ vierkante pas.

2c. Hieronder zijn een stel rechthoeken getekend.
Vind de oppervlakte van elk van die rechthoekige gebieden;
gebruik daarbij de maatlat van je geodriehoek.
Meet zo nauwkeurig als je kunt: zo nauwkeurig als je ogen, de getekende figuren en die maatlat toelaten;
de eenheid van die maatlat is: cm;
als oppervlakte-eenheid kies je: vierkante cm (tenminste: dat is het handigst);
in je antwoorden hoef je 'vierkante centimeter' (of: 'cm^2') niet te vermelden.



3a. Een verhaaltje.

Het kleindochtertje van Agenor bedelt bij haar grootvader om een stukje grond: ze wil zo erg graag afrikaantjes zaaien.

'Goed, zegt haar grootvader, hier heb je een eind touw en vier stokken.
Kijk, ik knoop de uiteinden van dat stuk touw aan elkaar.
Met die vier stokken en dat stuk touw mag je een vierhoekig gebied in opa's tuin omspannen. Je mag zelf weten, wàt voor 'n vierhoekig gebied.
Dàt gebied mag je hebben voor je afrikaantjes.'

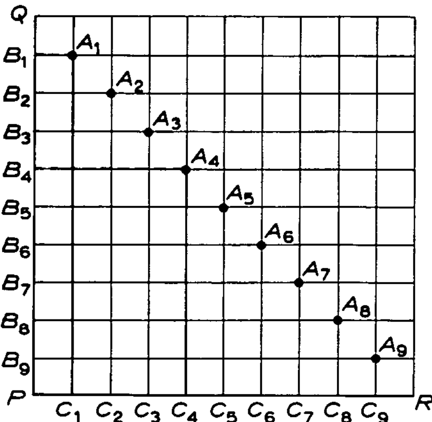
Het kleindochtertje van Agenor is dol op afrikaantjes: ze wil zo veel mogelijk grond hebben. Zij vermoedt dat het van belang is, wat voor een vierhoek ze met die vier stokken en dat stuk touw zal maken.

Ze vraagt haar oom Sichaeus om advies. Haar oom zegt haar:

'Opa maakt het je ook wel erg moeilijk.
Weet je wat: doe maar net alsof opa gezegd heeft, dat je een *rechthoekig* gebied moet omspannen.
Als je het rechthoekige gebied kunt vinden dat van alle rechthoekige gebieden die je met dat touw kunt omspannen, de grootste oppervlakte heeft, dan heb je daarmee het vierhoekige gebied gevònden met de grootste oppervlakte, dat je met dat touw kunt omspannen.'

Vraag: Stel je voor dat het kleindochtertje van Agenor nu bij jou om advies komt. Wat zou je haar dan aanraden?

3b. We gaan proberen het probleem van het kleindochtertje van Agenor op te lossen.
We nemen aan dat het waar is wat haar oom heeft gezegd:
we bekijken dus alleen rechthoekige gebieden.
We kiezen een 20e deel van de lengte van het touw als lengte-eenheid.
We maken een rooster met die lengte-eenheid; dat rooster is – verkleind – hieronder getekend.
In dat rooster maken we de hieronderstaande figuur.
Merk op: $PQ = 10$ en $PR = 10$; het weggetje QPR is dus even lang als het touw.
In dat rooster zijn een stel rechthoekige gebieden getekend:
gebied $A_1B_1PC_1$; gebied $A_2B_2PC_2$; gebied $A_3B_3PC_3$; ... (enz.).
Vul de tabel in die naast die figuur staat!



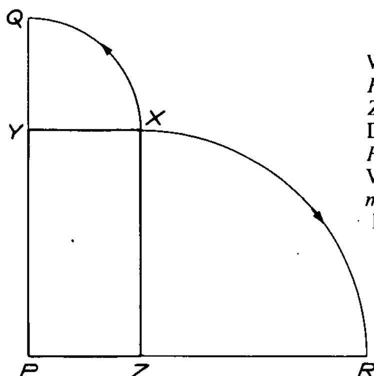
rechthoekig gebied	zijn omtrek	zijn oppervlakte
$A_1B_1PC_1$		
$A_2B_2PC_2$		
$A_3B_3PC_3$		
$A_4B_4PC_4$		
$A_5B_5PC_5$		
$A_6B_6PC_6$		
$A_7B_7PC_7$		
$A_8B_8PC_8$		
$A_9B_9PC_9$		

Vergelijk de uitkomsten!
Wat merk je op?
Kun je dat begrijpen?

Bij 3a: de verklaring die Sichaeus voor zijn advies geeft, is uitgedrukt in een volzin die voor sommige leerlingen te moeilijk bleek te zijn.
Bij 3b: door het rekenwerk hebben de leerlingen al idee gekregen van de oplossing; vele hebben de neiging daarmee tevreden te zijn. Voor het antwoord op de vraag: 'Kun je dat begrijpen?' hebben zij een duwtje nodig: 'vergelijk nu eens goed $A_3B_3PC_3$ en $A_4B_4PC_4$', (enz.).
Hier volgt blad 144:

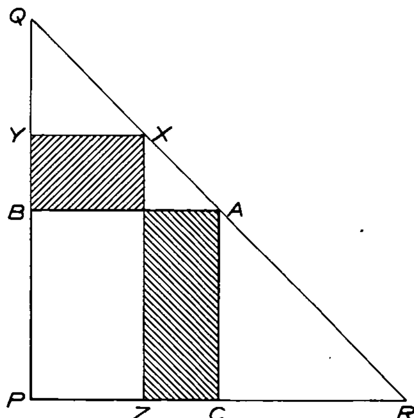
-144-
(hoofdstuk 12)

3c. We doen het nu zonder rooster.
Hieronder is een rechthoekig gebied getekend: het gebied $PYXZ$.
Laten we aannemen dat de omtrek van dat gebied gelijk is aan de lengte van het touw.



We construeren op het verlengde bij Y van het lijnstuk PY het punt Q zódat $YQ = YX$, en op het verlengde bij Z van het lijnstuk PZ het punt R zó dat $ZR = ZX$.
Dan:
$PQ = PR$ = de helft van de lengte van het touw.
Vul op verstandige wijze in:
$m(\angle YQX) =$ ________ en $m(\angle PQR) =$ ________.
DUS: X is een punt van het lijnstuk________.

Nu kun je ELK rechthoekig gebied waarvan de omtrek de lengte van het touw is, ZO neerleggen, dat: een van zijn hoekpunten in P ligt,
een van zijn zijden op de halve lijn PQ ligt,
en een van zijn zijden op de halve lijn PR ligt.
DAN zal ZIJN HOEKPUNT tegenover P op het LIJNSTUK QR LIGGEN!
Denk over dit laatste goed na! Zorg dat je dat goed begrijpt.
Hieronder is hetzelfde nog eens getekend;
maar daar is bovendien het vierkante gebied $PBAC$ getekend waarvan de omtrek gelijk is aan de lengte van het touw.
Begrijp je dat A een punt is van het lijnstuk QR?



Beredeneer nu:

[de oppervlakte van het rechthoekig gebied $PYXZ$] < [de oppervlakte van het vierkant gebied $PBAC$].

Let op de oppervlakten van die twee gearceerde gebieden; welke is het grootst? Waarom?

Schrijf nu hieronder je conclusie op:

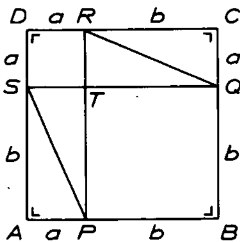
Van ALLE rechthoekige gebieden waarvan de omtrek de lengte van het touw is, heeft het ____________ de GROOTSTE ____________.

Schrijf hieronder je advies aan de kleindochter van Agenor!

Bij 3c: een van de leerlingen had naast het bovenste figuurtje ingevuld:

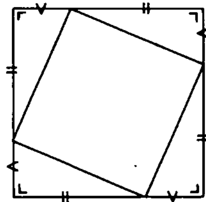
$$m(\angle\ YQX) = m(\angle\ YXQ) \text{ en } m(\angle\ PQR) = m(\angle\ PRQ);$$

zij riep mij er bij en zei zoiets als: 'ik zie wel dat X een punt is van het lijnstuk QR, maar ik snap dat 'DUS' niet'; toen ik haar er toe had gebracht, tweemaal '45°' in te vullen, was zij geheel tevreden.
Dat het vierde hoekpunt van al die rechthoekige gebieden ('zó neergelegd') een punt is van het lijnstuk QR wordt weliswaar vastgesteld door de leerlingen maar dat feit blijkt later bij velen onvoldoende verwerkt te zijn.
Voor zo ver ik heb kunnen vaststellen, leverde de onderste helft geen moeilijkheden op.
III. 3. Op de bladen 145 t/m 148 komen de leerlingen tot een verstandige afspraak over de oppervlakte van een gebied waarvan de rand een rechthoekige driehoek is; zij moeten vervolgens van een stel van zulke gebieden de oppervlakte zien te vinden m.b.v. metingen met een maatlatje.
Op blad 148 staan twee van zulke figuren (in de eerste zijn die lengten: 2 cm en 4 cm):



(in de tweede figuur zijn die lengten: a pink en b pink; welke eenheid 'pink' genoemd wordt, wordt uitdrukkelijk niet verklapt).
Van (uit elke figuur) negen gebieden moeten de leerlingen de oppervlakte noemen.
III. 4. De bedoeling met de bladen 149 (en 149a) die hieronder zijn afgedrukt, is de volgende:
Op de bladen 151 t/m 158 zal een bewijs van de stelling van Pythagoras worden gegeven dat staat of valt met het antwoord op de vraag:

'wat voor gebied is het binnenste gebied in:



De leerlingen zullen dan ook (op blad 154) uitgenodigd worden verschillende van zulke figuren te onderzoeken; zij zullen allemaal vermoeden, dat het antwoord op die vraag is: 'een vierkant gebied'; dat vermoeden behoeft een rationele bevestiging. Van die noodzaak zou je de leerlingen toch willen overtuigen!
Van de andere kant: wie niet bereid is zijn hoofd daarover te breken (en zulke kinderen zijn er): hem hoef je de stelling van Pythagoras toch niet te onthouden!
Vandaar dat blad 149 gemerkt is met 'Voor de liefhebbers'; het bevat een aansporing, tekeningen te wantrouwen; wie zich wil laten waarschuwen, wordt gevraagd zijn optimisme over die figuren op blad 148 (zie III. 3) critisch te onderzoeken; een motivatie daarvoor wordt gegeven op blad 149; dat is dan ook een motivatie, bovenstaande vraag in het bewijs van de stelling van Pythagoras heel precies te beantwoorden.

Voor de liefhebbers.

4d. Heb je, bij 4c. op blad 148, jezelf afgevraagd:
- is vierhoek *DRTS* een vierkant?
- is vierhoek *RCQT* een rechthoek?
- is vierhoek *TQBP* een vierkant?
- is vierhoek *TPAS* een rechthoek?

Antwoord: Dat heb ik mij ________ afgevraagd (vul maar in WEL of NIET).
Als je NIET hebt ingevuld, ga dan door met 4e.
Als je WEL hebt ingevuld, ga dan door met 4f.

4e. Dat je voorzichtig moet zijn en plaatjes moet wantrouwen, kan uit het volgende blijken.

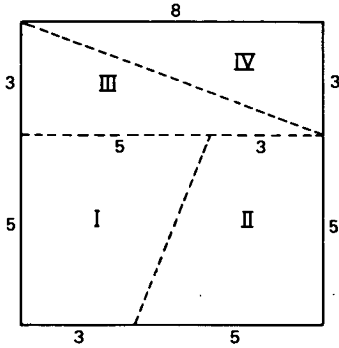
i. Bekijk het bovenste deel van blad 149a.
Links is een vierkant gebied getekend, rechts een rechthoekig gebied.
Het lijkt erop, of je, door het vierkante gebied te verknippen en de stukken op een andere manier samen te voegen, het rechthoekige gebied kunt krijgen.
MAAR: *O* (vierkant gebied) = ________
O (rechthoekig gebied) = ________ (vul maar in.)
ER KLOPT dus IETS NIET! Je bent BEDROGEN.
Probeer erachter te komen waar dat bedrog precies zit; het volgende kan je daarbij helpen.

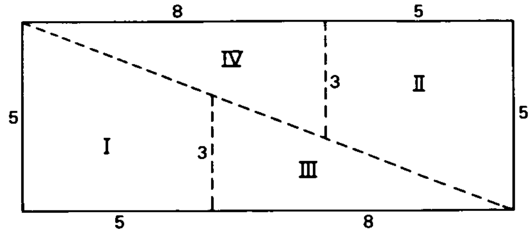
ii. Die bedrieglijke plek springt op het middelste deel van blad 149a heel duidelijk in het oog:
Als je op (nauwkeurig) roosterpapier
een punt kiest: A,
vanuit dat punt A 3 naar rechts en 1 naar beneden gaat: B,
vanuit dat punt B 2 naar rechts en 1 naar beneden gaat: C,
dan liggen die drie punten A, B en C HELEMAAL niet op een RECHTE lijn!
Het stuk van het rechthoekige gebied dat met IV genummerd is, is helemaal GEEN driehoek!
Geen wonder dat: *O* (vierkant gebied) ≠ *O* (rechthoekig gebied)
(25 ↙ ... ↘ 24)

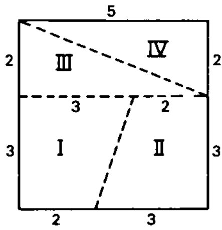
Wijs nu zelf de bedrieglijke plek in de figuren van het bovenste deel van blad 149a aan.

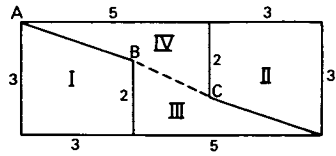
iii. Op het onderste deel van blad 149a zijn ook een vierkant en een rechthoekig gebied getekend.
Ook hier lijkt het, alsof je door verknipping van het vierkante gebied en samenvoeging van de stukken, het rechthoekige gebied kunt verkrijgen.
MAAR: *O* (vierkant gebied) = ________
O (rechthoekig gebied) = ________ (vul maar in.)
Dat onderste deel is het meest bedrieglijke van de drie!

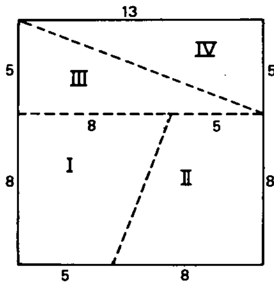
iv. Voor de vierkante en rechthoekige gebieden op blad 149a zijn de volgende getallenparen gebruikt: 2 en 3 (middelste deel)
3 en 5 (= 2+3) (bovenste deel)
5 en 8 (= 3+5) (onderste deel)
Je kunt nog bedriegliijkere figuren maken met de volgende getallenparen:
8 en 13 (= 5+8)
13 en 21 (= 8+13)(enz.)
Als je nu zeker wilt weten, dat je jezelf op blad 148 NIET bedrogen hebt, ga dan door met 4f. op blad 150.

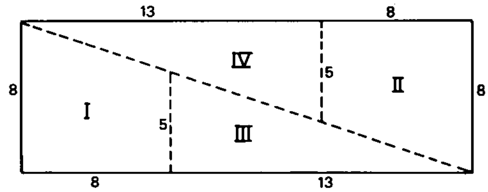




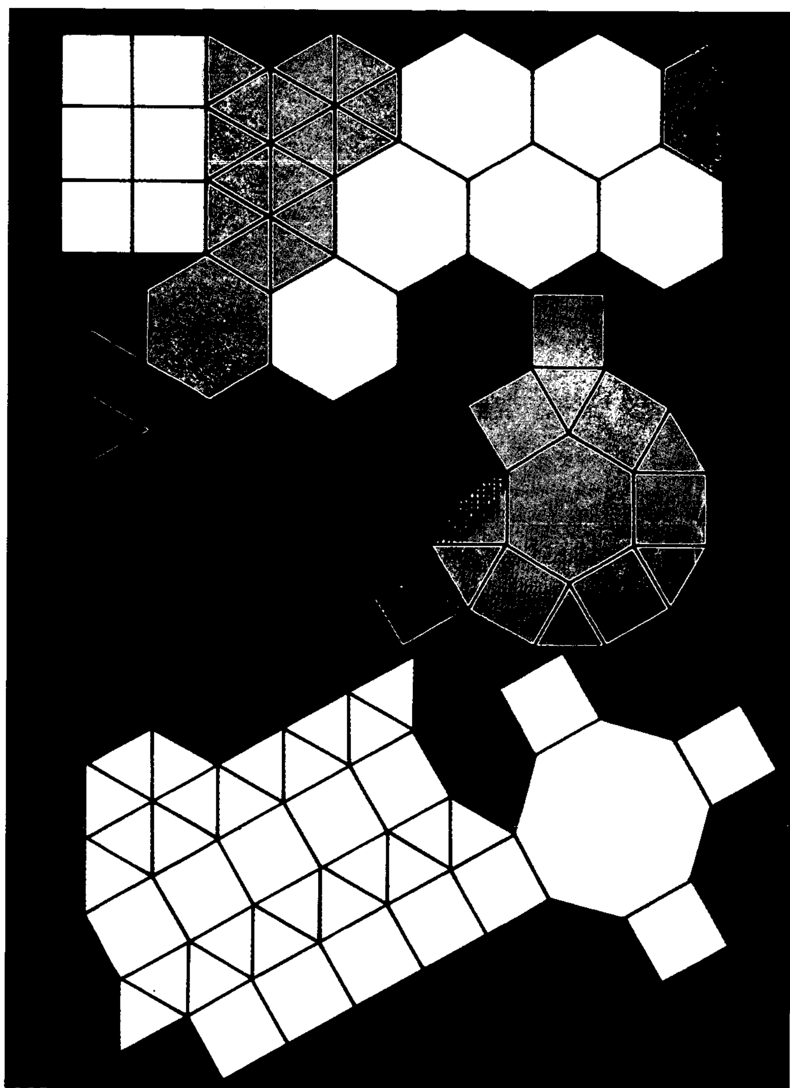








Opgave 8.
Drie cirkels met straal r gaan door één punt. Bewijs dat de overige snijpunten ook op een cirkel liggen met straal r.

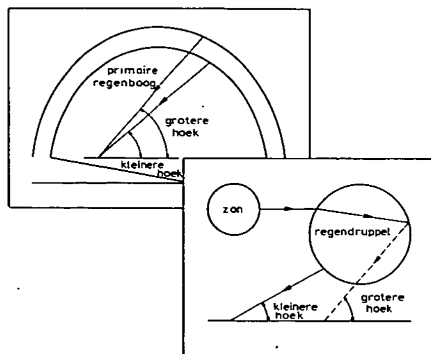


Over meetkundeonderwijs anno 1974

Opgave 9.
Hoeveel verschillende vlakvullingen kun je maken met alleen regelmatige veelhoeken? (zie de voorbeelden in het mozaïek van de vorige pagina)

10. Dr. W. van der Meiden: *De betekenis van de meetkunde bij het VWO voor verder studeren.*
11. Dr. P. G. J. Vredenduin: *Is het deductieve element in het meetkundeonderwijs bij het VWO verdwenen?*
12. Drs. J. v. Dormolen: *Over het leren begrijpen wat een bewijs is.*
13. P. Th. Sanders: *Meetkunde en meetkundeonderwijs bij het mavo.*

De betekenis van de meetkunde bij het VWO voor verder studeren



Dr. W. VAN DER MEIDEN

Nuenen

Voor de oorlog, en ook nog enige tijd daarna, was het wiskunde-onderwijs bij het VWO in een stationaire toestand: de leerlingen kregen algebra en meetkunde, sommige ervan stelden zich beschikbaar om aan universiteit, hogeschool of actencursus opgeleid te worden tot wiskundeleraar, vulden de tijdens hun studie vacant geworden plaatsen op en wijdden de rest van hun leven aan onderwijs in meetkunde en algebra.
In zo'n eenvoudige situatie is de betekenis van onderwijs niet zo moeilijk aan te geven; er zijn dan drie categorieën onder de leerlingen: aanstaande wiskundeleraren, overige aanstaande wiskundetoepassers, overigen.
Voor aanstaande wiskundeleraren had het wiskunde-onderwijs alleen een motiverende betekenis; aangezien vrijwel iedere wiskundestudent leraar werd, werden juist die leerlingen leraar, wier confrontatie als leerling met het leraarschap en al zijn emolumenten in voldoende mate gecompenseerd werd door interesse voor de wiskunde (en geschiktheid voor de studie ervan); overigens was voor hen de inhoud van het onderwijs in die zin niet interessant, dat ze daarvan tijdens de studie bijna alles nóg een keer kregen.
Voor de derde categorie was het wiskunde-onderwijs een ervaring, die wijd uiteenlopende reacties tengevolge had, van het met afschuw vaarwel zeggen voor altijd van de B-richting tot dankbare appreciatie van een algemeen vormend cultuurelement. Tot deze categorie behoorden misschien wel enkele Fermat-achtige persoonlijkheden die, notaris, piloot of dominee geworden, hun vrije tijd vulden met voortgezette belangstelling voor wiskunde en de postbussen van redactiesecretariaten met de resultaten ervan; zij zijn misschien wel de echtste wiskundigen, die wiskunde uit louter geestdrift bedrijven.
Dat het wiskunde-onderwijs zo lang stationair is gebleven, hangt evenwel ten nauwste samen met de tweede categorie, die hoofdzakelijk uit aanstaande beoefenaren van natuurwetenschap bestond (techniek daaronder begrepen). Deze toepassers hebben hun adhesie aan de wiskunde nooit onbetuigd gelaten; wanneer men ze ruwweg opnieuw indeelt in rekenaars en denkers (niet noodzakelijk elkaar uitsluitende types), dan profiteerden in ieder geval de denkers in hoge mate van de meetkunde blijkens de termen 'logisch denken' en 'ruimtelijk inzicht', die in discussies over meetkunde altijd weer worden gebezigd. Het gaat bij deze termen niet, althans zeker niet allereerst om 'bruikbare

kennis'; 'logisch denken' betekent hier achting krijgen voor deductiviteit en bijgevolg acht slaan op de beperkingen der inductiviteit: 'ruimtelijk inzicht' is een deel van, of een substraat van, of een conditionering van het inzicht, dat verschijnselen mechanistisch, dat is in mathematische termen van plaats en beweging, kunnen worden verklaard.
De gelukkige omstandigheid dat deze componenten in de synthetische meetkunde verenigd onderwijsbaar bleken, gaf aan het onderwijs boven de 'bruikbare kennis' uit zijn langdurig nauwelijks aangevochten culturele betekenis, voor de natuurwetenschappers in het bijzonder, maar ook voor leraren, dominees en notarissen. Zoals bekend zijn sedert de oorlog de leraren, de leerlingen, de onderwijsprogramma's en de eindexameneisen veranderd; bovendien zijn rekenen en denken niet meer zo exclusief gewoonten van technici en natuurwetenschappers: de computer verricht thans het rekenwerk, van het denkwerk wordt ook veel door sociologen geclaimd. Het is geen wonder, dat de vraag naar de betekenis van de meetkunde opnieuw rijst.
Nu is de invloed van het geometrisch-mechanistisch wereldbeeld zeker tanend, maar daarom nog niet minder relevant, integendeel: het in geding zijn van natuurwetenschap, de natuurwetenschappelijke methode en de toepassing van natuurwetenschap in techniek verleent aan de exploratie van zulke gedachtengangen juist een groter gewicht. Bovendien speelt het ruimtelijk inzicht in het onderwijs van de lineaire algebra een duidelijke rol: de lineaire algebra wordt daar veraanschouwelijkt in een deel van de meetkunde van de ruimte[1].
Wat het 'logisch denken' betreft, dat schijnt thans minder in zwang dan 'kritisch denken' en vooral 'creatief denken'; niettemin blijft het een essentieel kenmerk van iedere niet al bij voorbaat te verwerpen redenering.
De meetkunde heeft dus zeker nog rechten[2]. Heeft de thans onderwezen meetkunde die rechten ook? Ik geloof, dat het huidige programma, waarbij ik de lineaire algebra kortheidshalve bij de meetkunde reken, mits onderwezen, voldoende ruimte biedt om beide componenten tot hun recht te laten komen; of de schoolpraktijk, met veranderend gedisponeerde leerlingen en leraren, die ruimte laat, weet ik niet. De eindexamenregels (en in aansluiting daarop de door de minister aan de faculteiten toegestane toelatingseisen) laten aan het meetkunde-onderwijs geen recht wedervaren: juist met betrekking tot de motivatie van een latere studiekeuze (en te meer, omdat hier toch al een volkomen irrationeel kunstmatig noodlot van invloed is) acht ik het verzuimen van meetkunde-onderwijs in de hogere klassen een bedenkelijke omissie, althans voor B-georiënteerden[3].
Wanneer men voor de betekenis van het onderwijs ook de bruikbaarheid als criterium aanlegt (en ik merk terzijde op, dat bruikbaarheid een gebruikelijk maar gebrekkig discriminerend begrip is), dan komt men tot de volgende conclusies: voor wie de schoolwiskunde (min of meer) eindonderwijs in wiskunde is, zijn zeker aantrekkelijke alternatieven denkbaar en voor een deel ook aanwezig[4]; voor de aanstaande wiskundestudenten is de keuze van onderwerpen om dezelfde reden als vroeger, mits interessant, betrekkelijk. De overigen (en dat zijn er meer dan vroeger en niet alleen in de natuurwetenschappen) krijgen vroeg of laat, rekenend of denkend, met lineaire algebra te

maken. Dit deel van het schoolprogramma zou dus een 'bruikbaar', 'zinvol', in ieder geval effectief onderdeel van het totale wiskunde-aandeel in zulke studies kunnen zijn.

De betekenis van het meetkunde-onderwijs staat, ten slotte, in betrekking tot de betekenis van het hele onderwijs, en die is principieel dubbelzinnig: enerzijds fungeren scholen en universiteiten als onderwijsinstituten voor beroepsgerichte, althans doelbewuste of desnoods een doel zoekende studerenden, anderzijds dienen ze ook voor een 'algemeen vormend onderwijs, dat niet is afgestemd op duidelijke beroepen, waar ieder met voldoende capaciteiten en ambitie moet worden toegelaten, maar dat in duur en uitrusting moet worden aangepast aan de beschikbare middelen'[5].

Deze tweeslachtigheid heeft zijn invloed op het schoolprogramma al royaal doen gelden en zal ook voortaan het onderwijs frustreren.

Onderwijs blijft nog roeien met ongelijke riemen.

Aantekeningen

1 Zie voor een discussie van de betrekking tussen meetkunde en lineaire algebra: The case of geometry, in: H. Freudenthal, Mathematics as an educational task, Reidel, Dordrecht, 1973.

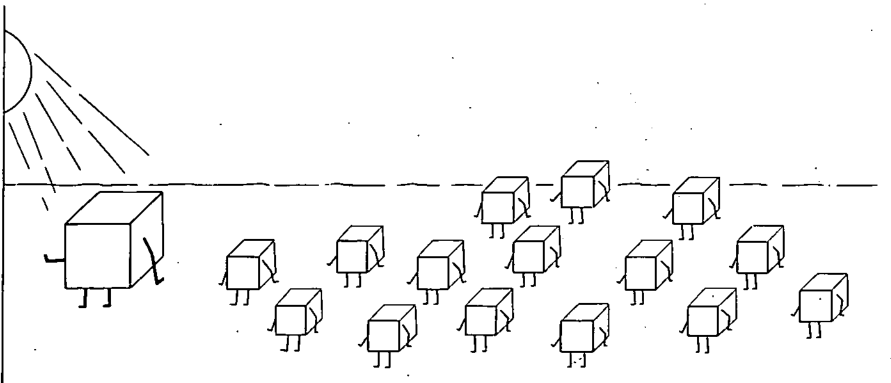
2 De meetkunde heeft daarenboven nog bewonderaars, maar ik laat hier de affecties buiten beschouwing.

3 'Ik heb de eer hier alleen te staan' (zoals een Franse gezant in 1814). Naar aanleiding van een vraag van een schooldekaan over de advisering van keuzepakketten voor VWO-leerlingen, die aan Technische Hogescholen willen gaan studeren, heeft een groep van representanten van het wiskunde-onderwijs voor lagerejaars studenten zich over deze advisering beraden; het ging erom, of aan zulke leerlingen aangeraden moest worden wiskunde 2 in het examenprogramma op te nemen of niet; overwegend, dat men door een positieve advisering de door de wetgever met de Mammoetconstructie bedoelde vrijheid van keuze belemmert, besloot dit gezelschap in grote meerderheid zo'n advisering niet aan te moedigen (Inter T.H.-overleg over lagerejaars wiskunde, 6 mei j.l.). Op suggestie van de voorzitter zegde ik daar toe een artikel te schrijven over deze problematiek, hetgeen erop neerkwam, dat ik van mijn hart een moordkuil moest maken. Met deze voetnoot tracht ik mij uit die situatie te redden.

4 Bij voorbeeld computerkunde en statistiek; het betreffende rapport nr. 3 van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (1968) is voor een (nog toenemend) deel gehonoreerd.

5 Dit is een verminkt telescopisch citaat; telescopisch: het komt uit een krantenartikel (J. van Spaandonk, NRC-Handelsblad, 13 juni 1974) over een door minister Van Kemenade op de Universiteit van Nijmegen gehouden rede. Verminkt: in het artikel staat: '..... algemeen vormend *hoger* onderwijs .....'; maar dan geldt het a forteriori voor het VWO, en met weglating van de beperking door beschikbare middelen. Wat de contekst betreft: de minister stelde daar voor (aldus de krant) om 'het hoger onderwijs in tweeën te hakken'.
Ik heb er daarna niet meer over gehoord.

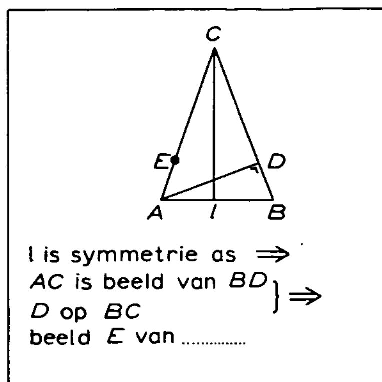
Opgave 10.
Volgens de overleveringen zijn Lilliputters Gullivers op schaal 1 op 12. Welk gevaar bestaat er voor Lilliputters als ze, net als Gulliver, gaan zonnebaden?



Is het deductieve element in het meetkundeonderwijs bij het VWO verdwenen?

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Doorwerth



In ons huidige meetkunde-onderwijs bij het vwo is het deductieve element verdwenen. Dit is een veelgehoorde klacht.
Laten we eerst eens nagaan wat er eigenlijk verdwenen is. In het oude programma werd de meetkunde intuïtief ingeleid, meestal tot de congruentie. Zodra men de beschikking had over de vijf congruentiegevallen werd het menens. Elke verdere bewering moest bewezen worden. In de eerste klas werd van dat moment af vrijwel de gehele tijd besteed aan het bewijzen van eigenschappen. Ik wil volstaan met het geven van één voorbeeld.

Stelling. Als in een vierhoek de diagonalen elkaar middendoor delen, is de vierhoek een parallellogram.

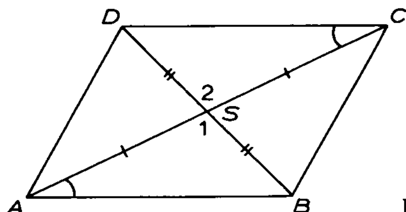


Fig. 1.

Bewijs.

$$\left.\begin{array}{r}\angle S_1 \text{ en } \angle S_2 \text{ zijn overstaand} \Rightarrow \angle S_1 = \angle S_2\\ AS = CS\\ BS = DS\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ASB \cong \triangle CSD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle C_1 \Rightarrow AB \parallel CD\\ AB = CD\end{array}\right\} \Rightarrow ABCD \text{ is een parallellogram}$$

Elke pijl vindt zijn rechtvaardiging in een voorafgaande stelling. Wie dit jarenlang met succes aan eersteklassertjes heeft gedoceerd, is er verknocht aan geraakt.
Merkwaardig was wel, dat in de verdere planimetrie deze denkvorm een veel minder prominente rol ging spelen. Een groot deel van de beschikbare tijd werd besteed aan berekeningen, en ook wel aan constructies.
Maar dan dook de boven beschreven methode in volle hevigheid weer op in het begin van de stereometrie. Zelfs rigoureuzer, want nu niet slechts gebaseerd

op een intuïtieve inleiding, maar op expliciet geformuleerde axioma's. Onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken, loodrechte stand, hoeken en afstanden werden streng deductief behandeld. Een voorbeeld.

Stelling. Als een van twee evenwijdige lijnen een vlak snijdt, snijdt de andere het vlak ook.

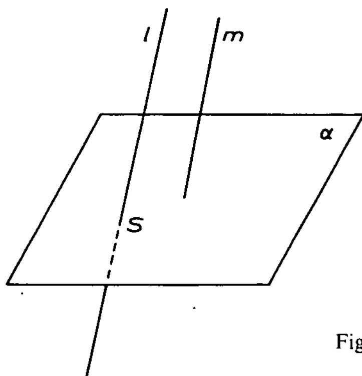


Fig. 2.

Bewijs.

$$l \,//\, m \Rightarrow \text{er is een vlak } \beta \text{ door } l \text{ en } m \Rightarrow \left.\begin{array}{r} S \text{ in } \beta \\ S \text{ in } \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \text{ en } \beta \text{ hebben een snijlijn } s \Rightarrow \left.\begin{array}{r} l \text{ snijdt } s \\ l \,//\, m \\ l, m, s \text{ in } \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} m \text{ snijdt } s \\ \Downarrow \\ m \text{ snijdt } \alpha \end{array}$$

Essentieel hierin is, dat de leerling geen pijl neerschrijft zonder zich er rekenschap van te geven, dat deze pijl behoorlijk verantwoord is. We waren nu in de vierde klas van de hbs of de vijfde van het gymnasium en de leerlingen waren dus al veel rijper. Maar het werk ging aanmerkelijk moeizamer dan in de eerste klas. Het was soms een penitentie de leerlingen al die dingen, die ze allang wisten, op een dergelijke moeizame manier te laten afleiden.

Zo doen we het in het huidige onderwijs niet meer. En als we zeggen, dat het deductieve element uit ons meetkunde-onderwijs is weggevallen, dan bedoelen we, dat we het 'zo' niet meer doen.

Op het eerste gezicht is dit tamelijk duidelijk. Hoe langer je erover denkt, des te vager wordt het. Wat is er nu eigenlijk weggevallen? Deduceren we in ons meetkunde-onderwijs niet meer? Dat kan niet; dan zouden we geen wiskunde meer bedrijven. En deze pretentie hebben we wel degelijk.

Dus nu preciezer: wat is er weggevallen? Waaruit bestond dit 'deductieve element'?

Ik zou het zo willen formuleren: het bestond uit het opschrijven van een bewijs in de vorm van een graf van een partieel geordende verzameling uitspraken. De ordening werd door de pijlen weergegeven.

De welbewuste training een bewijs in deze vorm op te schrijven is uit ons onderwijs verdwenen. De pijl zal veelal niet zijn intrede doen in de brugklas,

maar eerst in de tweede klas. En dan niet eens in eerste instantie in de meetkunde, maar in de algebra. Is het onderdrukken van dit 'deductieve element' een ernstige zaak? Juist nu ik getracht heb scherp te formuleren waaruit dit 'deductieve element' bestaat, lijkt het wegvallen ervan toch wel ernstig te zijn. Immers, wat is een bewijs? Een bewijs is een partieel geordende verzameling uitspraken waarin elke uitspraak een direct gevolg is van een of meer voorgaande. De graf is niet anders dan een hulpmiddel om de ordening te visualiseren.

Nu slaat de schrik ons toch wel om het hart, want hebben we nu niet met het 'deductieve element' het meest essentiële van het wiskundige denken overboord gezet?

Een paar voorbeelden om te laten zien, wat we eigenlijk overboord gezet hebben. Een uit de algebra en een uit de meetkunde.

We willen laten zien dat $2+3=5$. Voorkennis: $1+1=2$, $2+1=3$, $3+1=4$, ... en de fundamentele eigenschappen van de optelling.

Stelling. $2+3=5$.

Bewijs.

$$\left.\begin{array}{rl} a+b=b+a \Rightarrow & 2+3=3+2 \\ 1+1=2 \Rightarrow & 3+2=3+(1+1) \\ a+(b+c)=(a+b)+c \Rightarrow & 3+(1+1)=(3+1)+1 \\ 3+1=4 \Rightarrow & (3+1)+1=4+1 \\ & 4+1=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 2+3=5$$

Prachtig deductief. Maar wie wenst propaganda hiervoor te maken? Wie het rekenproces nauwkeurig analyseert, komt misschien wel tot de slotsom dat zo (of ongeveer zo) gerekend wordt. Maar niemand realiseert zich de verrichte stappen stuk voor stuk.

Nu een meetkundig voorbeeld uit het huidige programma. We willen laten zien, dat de hoogtelijnen op de benen van een gelijkbenige driehoek aan elkaar gelijk zijn.

Voorkennis. De bissectrice van de tophoek van een gelijkbenige driehoek is symmetrieas van de driehoek en verder de fundamentele eigenschappen van de spiegeling. In het bewijs voeren we een spiegeling uit t.o.v. deze bissectrice.

Stelling. Als in $\triangle ABC$ geldt $AC = BC$, dan zijn de hoogtelijnen uit A en B aan elkaar gelijk.

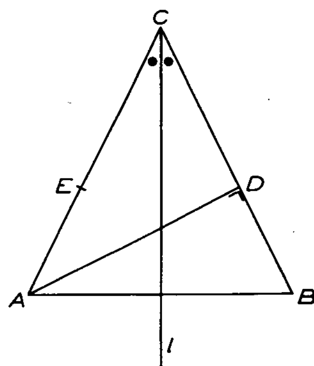


Fig. 4.

Bewijs.

l is symmetrieas $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\text{lijnstuk } AC \text{ is beeld van lijnstuk } BC \\ D \text{ ligt op lijnstuk } BC\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \text{het beeld } E \text{ van } D \text{ ligt op lijnstuk } AC \\ \Rightarrow A \text{ is beeld van } B \text{ en } B \text{ is beeld van } A\end{array}\right\} \angle BEA \text{ is beeld van } \angle ADB \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \angle BEA = \angle ADB \Rightarrow \text{lijnstuk } BE \text{ is de hoogtelijn uit } B \\ B \text{ is beeld van } A \text{ en } E \text{ is beeld van } D \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{lijnstuk } BE \text{ is beeld van lijnstuk } AD \Rightarrow \quad BE = AD\end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ de hoogtelijnen uit A en B zijn aan elkaar gelijk

Net zo min als men zijn leerlingen laat zien dat $2+3 = 5$ door ze dol te maken, zal men trachten oproer te verwekken met het produceren van bovenstaand schema.

Toch volgt men deze gedachtengang wel, maar men is niet zo dolzinnig alle details te releveren en er een graf van te maken. Hoe zou men het kunnen doen? Hieronder volgt een mogelijkheid. Het didactische spel laat ik achterwege en schrijf alleen op wat er uiteindelijk op het bord komt te staan.

(Bewijs.) Spiegel t.o.v. l. Het beeld van D is een punt op lijnstuk AC. Noem dit punt E. Trek lijnstuk BE.

$\angle AEB$ is beeld van $\angle BDA$; BE is dus een hoogtelijn.

Lijnstuk BE is beeld van lijnstuk AD, dus $BE = AD$.

De hoogtelijnen AD en BE zijn dus even lang.

Wie de voorkeur aan een variant geeft, gaat zijn gang. Waar het mij om gaat, is dat er al aardig 'geredeneerd' wordt. Maar niet elke stap wordt expliciet vermeld. Dat is het verschil tussen de 'spiegelbewijzen' en de 'congruentiebewijzen'. Dat is ook de reden, dat de pijlengraf hier niet meer goed kan functioneren.

Tot slot ga ik terug naar de stelling die ik aanvankelijk met congruentie bewezen heb: als in een vierhoek de diagonalen elkaar middendoor delen, is die vierhoek een parallellogram.

Onze huidige meetkunde berust op twee fundamentele bewijsmethoden: bewijs door middel van afbeeldingen en bewijs met gebruikmaking van vectoren. Ik zal de stelling op twee manieren bewijzen: eerst met afbeeldingen en daarna met vectoren.

In deze bewijzen wordt als definitie van een parallellogram bekend verondersteld: Een vierhoek waarvan één paar zijden gelijk en evenwijdig is, is een parallellogram.

Bewijs 1.

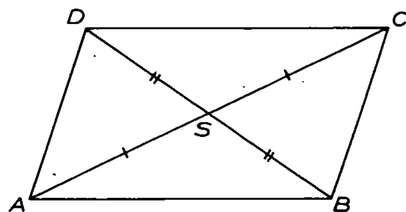


Fig. 5.

Spiegel t.o.v. S. Dan is:
C beeld van A
D beeld van B
en dus
lijnstuk CD beeld van lijnstuk AB.
Daaruit volgt, dat $CD = AB$ en lijnstuk CD // lijnstuk AB.
Dus is $ABCD$ een parallellogram.
Bewijs 2.

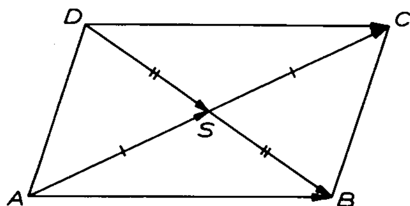


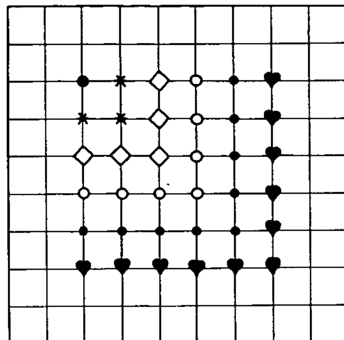
Fig. 6.

(Ik werk met vrije vectoren, maar moet me wat behelpen. Een vector is bij mij een gericht lijnstuk. Twee vectoren zijn gelijk als de gerichte lijnstukken even lang, parallel en gelijkgericht zijn.)

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SC} \\ \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{DS}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{DS}+\overrightarrow{SC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow$ de lijnstukken AB en DC zijn gelijk en evenwijdig $\Rightarrow$ $ABCD$ is een parallellogram.

Dat ziet er heus nog niet zo gek uit. Bewijs 1 is aardig 'deductief'. Alleen zien we de pijlen niet, omdat de leerlingen daar niet aan gewend zijn.
Bewijs 2 hoort in de tweede klas thuis. De leerlingen zijn daar in de algebra, hoop ik, al gewend aan enkele en dubbele pijlen. Ze zullen met dit bewijs geen moeite hebben. Het is mooi 'deductief' en zelfs opgeschreven op de nette manier.
Conclusie. We leren onze leerlingen heus nog wel deduceren. Aanvankelijk vragen we in het meetkunde-onderwijs niet meer dan een eenvoudige motivering waarom iets waar is. De leerlingen wennen eraan, dat ze niet zeggen dat iets waar is, omdat ze het zien, maar dat het de moeite waard is even te motiveren, dat bijv. een gelijkbenige driehoek gelijke basishoeken heeft. Een enkele maal loopt die motivering iets uit, zoals in het voorbeeld van de gelijkheid van twee hoogtelijnen van een gelijkbenige driehoek. Maar van stelling – bewijs is geen sprake. De noodzaak wordt hier voorbereid te motiveren (bewijzen) wat men beweert.
In de tweede klas wordt dit nader uitgewerkt. De rijpheid van de leerlingen voor abstract denken is toegenomen. Het gebruik van vectoren leidt ertoe, dat eigenschappen bewezen worden. Bij dit bewijzen wordt meer gerekend dan vroeger in de meetkunde, maar methodisch is het duidelijk bewijzen.
De leerling komt gaandeweg op een hoger niveau zonder dat hem op een gegeven ogenblik bevolen wordt nu, in tegenstelling tot wat hij gewend was, beweringen te bewijzen.

Over het leren begrijpen wat een bewijs is



Drs. J. VAN DORMOLEN

Oegstgeest

1 Men hoort tegenwoordig nog wel eens de uitspraak, dat de leerlingen, die het nieuwe wiskundeprogramma krijgen niet meer weten wat bewijzen is.
Daar kan men tegenover stellen, dat leerlingen in het oude programma meestal ook maar wat op goed geluk deden. Door een hoop routine kwam het vaak nog wel goed uit ook, maar wat nou eigenlijk bewijzen is, daar hadden ze geen notie van.
Beide uitspraken zijn erg ongenuanceerde zwart-wit-beweringen, maar in beide zit toch wel een grond van waarheid. Het is duidelijk dat er tegenwoordig iets mis is, maar we zullen er voor moeten oppassen, dat we niet terug gaan naar verkeerde toestanden van voor 1968.
Om iets meer te kunnen zeggen dan de wilde uitspraak: 'Ze weten tegenwoordig niet meer wat bewijzen is' wil ik eerst met u nagaan onder welke voorwaarden iemand kan leren wat bewijzen is. Daarna zal ik terugkomen op bovengenoemde zwart-wit-beweringen.

2 Als iemand een wiskundig probleem wil oplossen zal hij meestal niet van het begin af aan een streng deductieve redenering kunnen houden. Gewoonlijk begint hij met een meer of minder rommelige periode van zoeken en proberen waarin hij greep op het probleem probeert te krijgen. Als dat is gelukt, dan gaat hij proberen zijn oplossing netjes op te schrijven. Dat wil zeggen dat hij er een logisch sluitend geheel van gaat maken. Wat uiteindelijk op papier behoort te staan is een deductieve redenering. In het wiskunde-onderwijs behoort daarom plaats ingeruimd te worden aan het leren geven van deductieve redeneringen.

3 Aan dat leren zitten twee aspecten. In de eerste plaats is er het technisch-rationele aspect: het leren van methodieken om de eerste periode van onderzoek minder rommelig, meer doelgericht en meer doelmatig te doen zijn. Daarvoor is kennis en vaardigheid nodig, die vooral door veel oefenen verkregen wordt.
Maar er is ook een psychologisch-emotioneel aspect. Dat heeft minder met kennis en vaardigheid te maken, maar meer met het accepteren van de noodzaak dat een deductieve redenering nodig is, ook in gevallen dat je op je klompen

kunt aanvoelen dat de bewering waar is. Zoiets moet je ook leren en je kunt het niet leren door een simpele mededeling van je leraar. Over dit psychologisch-emotionele aspect zal ik het verder hebben.

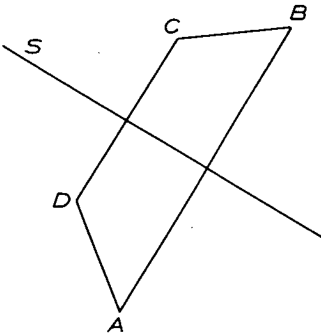
4 Wat voor een beginneling vanuit zijn denkniveau vanzelfsprekend is, is voor een geoefend wiskundige vanuit diens denkniveau volstrekt niet te accepteren. Hier volgen een paar voorbeelden van redeneringen op verschillende denkniveau's.

A Opdracht:
Teken een gelijkbenig trapezium en bewijs dat de diagonalen gelijk zijn.

A0 Verschillende oplossingen:
Een leerling meet de diagonalen met de liniaal. 'Er komen gelijke getallen uit, dus de diagonalen zijn gelijk'.

A1 Een andere leerling knipt in gedachten het trapezium uit, klapt het om en legt het weer in zijn opening terug. 'Je ziet zo dat dat kan, dus zijn de diagonalen gelijk'.

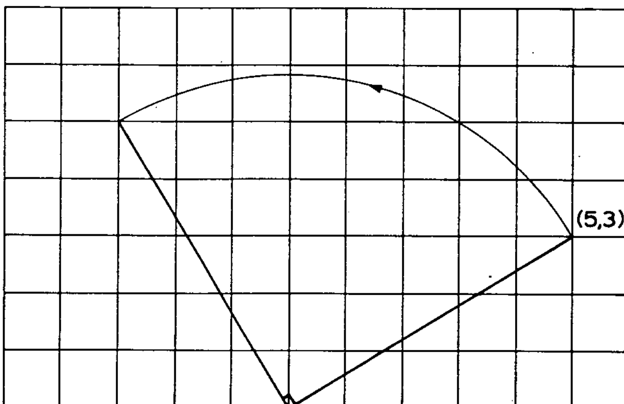
A2 'Een gelijkbenig trapezium is per definitie een vierhoek met een symmetrie-as die niet door een hoekpunt gaat.



Bij dit trapezium is er dus een spiegeling S zodat $S(ABCD) = BADC$. Dus is $S(AC) = BD$. Lijnstuk en beeldlijnstuk zijn bij spiegelingen congruent. Dus zijn de diagonalen even lang'.

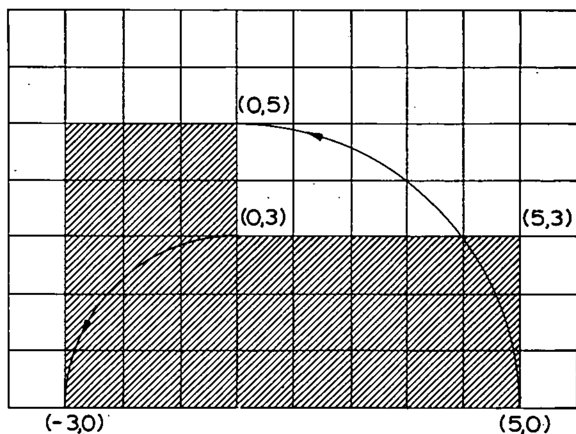
B Vraag:
Wat is het beeld van een punt van het rooster, bij draaiing van het vlak om 0 over 90°?

B0 Verschillende oplossingen:
Een leerling tekent een punt op roosterpapier, bijvoorbeeld (5,3).



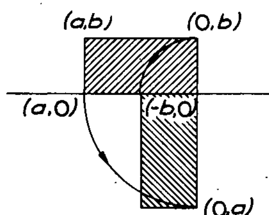
Hij voert de draaiing netjes uit, en constateert dat het beeldpunt precies in $(-3,5)$ uitkomt.

B1 'Ik neem een punt op roosterpapier, bijv. (5,3). Kijk naar de rechthoek met hoekpunten (0,0), (5,0), (5,3) en (0,3).



Het beeld van (5,0) is (0,5); het beeld van (0,3) is $(-3,0)$.
Dus het beeld van (5,3) is $(-3,5)$'.

B2 'Ik doe het algemeen. Teken een punt (a, b). Neem eerst $a \neq 0$ en $b \neq 0$. Beschouw de rechthoek met hoekpunten (0, 0), $(a, 0)$, (a, b) en $(0, b)$.



Bij rotatie gaat (0, 0) over in (0, 0), (a, o) in $(0, b)$ in $(-b, 0)$. Dit geldt onafhankelijk van het kwadrant waarin (a, b) ligt. Bij rotatie gaat een rechthoek over in een daarmee congruente rechthoek. Dus is het gevraagde beeldpunt $(-b, a)$.
Dit is ook waar als $a = 0$ en/of $b = 0$'.

C Vraag:
Wat is de som van de eerste n oneven getallen?
Verschillende oplossingen:

C0 'Ik weet niet welk getal n is, dus ik kan de vraag niet beantwoorden'.

C1 '$1+3 = 4$; dat is de som van twee oneven getallen.
$1+3+5 = 9$; dat is de som van drie oneven getallen.
$1+3+5+7 = 16$; dat is de som van vier oneven getallen.
De som van n oneven getallen is dus n^2'.

C2 Iemand begint als bij C1. Leidt daaruit de hypothese af dat het antwoord n^2 is en bewijst deze hypothese met volledige inductie.

5 Als u of ik een redenering als A0, B0, C0 zou geven, dan zou men zich redelijkerwijs kunnen afvragen waar u of ik het recht vandaan haalt onderwijs in de wiskunde te geven. Als een leerling van de brugklas zo, zonder hulp van buiten, zou redeneren, zou men tevreden kunnen zijn. Vanuit zijn denkniveau heeft hij een logische redenering gegeven. Dat blijkt hieruit, dat hij er het woordje 'dus' bij gebruikte.
Een redenering als A1, B1, C1 zou hij niet kunnen geven, maar hopelijk wel als hij een of twee jaar verder is. Hopelijk zal hij A0, B0 en C0 dan niet meer accepteren als een logische redenering. Vanuit zijn denkniveau zijn nu A1, B1, C1 goede logische redeneringen.
Van u en van mij zouden ook deze niet geaccepteerd kunnen worden, want wij worden verondersteld weer een hoger denkniveau te hebben.
Wat zijn nu die denkniveau's? Diegenen die de theorie van Van Hiele (1) hierover kennen hebben al begrepen wat ik bedoel. Voor de anderen zal ik er verderop iets over zeggen. Maar ik wil eerst over iets anders praten.

6 In A0, B0, C0 was er sprake van logische ordening van een heel klein gebied. Er werd één keer het woord 'dus' gebruikt. Buiten dit gebied staan misschien wel andere begrippen, maar die hebben geen verband met de begrippen er binnen.
Freudenthal spreekt van *lokale ordening*. Ik kan niet beter doen dan hemzelf hierover aan het woord te laten. (2)

'Als een leerling door konstruktie ontdekt dat men de straal van een cirkel zesmaal op de omtrek kan afpassen en als hij als verklaring geeft, dat de hoeken van een gelijkzijdige driehoek 60° zijn, dan is dat volkomen streng. Voor de edelmathematicus is deze argumentatie natuurlijk een gruwel. Want wat wordt hier niet allemaal verondersteld! Hoeveel axioma's heeft men niet nodig om tot dit resultaat te komen, hetzij men het volgens Euclides, hetzij volgens Hilbert, of met lineaire algebra doet. Inderdaad, maar dat moet de leerling ook eerst leren en hij leert het niet door hem een axiomastelsel voor te zetten. Dat zou, uit didaktisch oogpunt, een volstrekt onstrenge handelwijze zijn. Strengheid dient om te overtuigen en kant-en-klare wiskunde overtuigt niet. Om in de strengheid vooruit te gaan moet men eerst gaan twijfelen aan de strengheid die men op dit moment toepast. Zonder die twijfel heeft men er weinig aan zich hogere maatstaven van strengheid te laten opleggen.
Natuurlijk behoort de leerling bij een opgave als die van de regelmatige zeshoek zich af te vragen: 'Wat heb ik nu eigenlijk verondersteld?'
Wij weten dat de leerling, als hij daar steeds mee doorgaat zich in vaagheden of in cirkelredeneringen moet verliezen. *Wij* weten het. De leerling weet het nog niet. Ook dat moet hij ondervinden. Zonder zulke ondervindingen kan hij in elk geval de zin van de axiomatiek niet begrijpen.
Tot het zover is bedrijft hij, wat men *lokale ordening* van het veld noemen kan. Het zal blijken dat dit begrip belangrijk is voor de didaktiek in het bijzonder van het meetkunde-onderwijs.
Men analyseert de meetkundige begrippen en relaties tot een geheel willekeurige grens, laten we zeggen, tot het punt waar men van de begrippen met

het blote oog ziet wat ze betekenen en van de stellingen dat ze waar zijn. Zo redeneert men altijd in de meetkunde van ruimte waarin we leven; nooit vanuit axioma's, die veel te ver weg liggen, maar naar een vervagende en zich verschuivende horizon van stellingen, die op dat moment voor waar aangenomen worden, toe.
Het veld wordt met kleine of grotere stukken, maar niet als geheel geordend. Zo doet men het overal, ook in de natuurkunde of waar men verder wiskunde gebruikt'.

In A1, B1, C1 is het gebied dat logisch genoemd kan worden iets groter. Er is nog wel lokale ordening maar er is meer verband tussen verschillende gebieden. Dat blijkt uit het feit dat de oplosser niet meer afhankelijk is van het speciale bestudeerde object.
In A0 was de oplosser gebonden aan dat speciale trapezium. Had men hem een nieuw trapezium gegeven dan was hij opnieuw begonnen.
In B0 was hij gebonden aan het speciale punt (5,3). Had men hem een ander punt laten onderzoeken, zoals bijv.: (7,4), dan had hij van voren af aan moeten beginnen.
En als men hem (−3,5) aangewezen had, dan betwijfel ik of hij wel tot een goede eindconclusie had kunnen komen.
In C0 kon hij zichzelf geen speciaal object denken en kon hij dus geen oplossing geven.
Bij A1, B1, C1 daarentegen waren de objecten die bestudeerd werden op zichzelf niet meer belangrijk. Het waren representanten van een collectie gelijksoortige objecten. De oplosser bestudeerde niet meer eigenschappen van het object, maar van de soort. Hij kon zich gemakkelijk andere objecten denken dan degene die hij zag.
De oplossers die A2, B2, C2 gaven waren weer een stapje verder. Zij waren niet gebonden aan speciale objecten, noch aan collecties van gelijksoortige objecten. Zij konden in hun redenering rekening houden met regels die bij een logische redenering horen te gelden, onafhankelijk van datgene waarover geredeneerd wordt.

7 Hiermee ben ik aangeland bij de drie denkniveau's van Van Hiele.
Eerst is er het grondniveau: de leerling is in zijn denken gebonden aan speciale objecten. Dit trapezium is anders dan dat. Dit kwadraat heeft niets te maken met dat. De ordening is zeer lokaal.
Door de leerling veel voorbeelden te geven van wat wij gelijksoortige objecten noemen kan hij sorterenderwijs tot het inzicht komen dat ze allemaal iets gemeenschappelijks hebben. Hij ontdekt dat bepaalde eigenschappen van dit trapezium eigenschappen zijn van alle trapezia. Een trapezium is niet langer een vorm, maar het is een begrip geworden. Hij is op het *eerste denkniveau.* De ordening is veel minder lokaal, hoewel nog steeds beperkt tot het gebied waarover gesproken wordt. Ordening in de trapezia is niet hetzelfde als ordening in de coördinatentransformaties en die is weer anders dan ordening in de kwadraten.*

* Het is mogelijk dat ik hierbij Freudenthal's begrip lokale ordening uitbreid op een manier die hij niet bedoelde, J. v. D.

Als de leerling een tijd op het eerste denkniveau bezig is geweest, begint hij te merken dat redeneringen over zeer verschillende gebieden gemeenschappelijke elementen hebben.
Die redeneringen op zich zijn sorteervoorbeelden die leiden tot het begrijpen wat logische ordening zelf is. Hij kan redeneren over het redeneren. Hij is op *het tweede denkniveau.*
Zoals men op het eerste niveau gegevens over verschillende gelijkbenige trapezia kon ordenen, zo kan men op het tweede niveau gegevens over verschillende redeneerwijzen ordenen.
Samenvattend zou men kunnen zeggen dat men op een hoger denkniveau in staat is een interne ordening van het lagere niveau aan te brengen.

8 Essentieel voor het wiskundeonderwijs is nu, dat de leraar er rekening mee houdt, dat iemand niet in het hogere niveau kan opereren als hij het lagere nog niet bereikt heeft. Wordt hij gedwongen dat toch te doen dan zal hij zijn toevlucht moeten nemen tot trucjes, domweg uit het hoofd geleerde manipulaties. Van elk type opgaven heeft hij een standaardoplossing geleerd. Hij kan niet inzien wanneer twee standaardoplossingen gelijk zijn en als hij een opgave niet direct herkent is hij verloren. Als hij iets moet bewijzen, dan doet hij het – als hij het kan – omdat de leraar het zegt, niet omdat hij zelf vindt dat het nodig is.

9 Ik kom nu terug op wat ik in het begin vermeld heb: de twee controversiële uitspraken:
– Leerlingen die het nieuwe wiskundeprogramma krijgen weten niet meer wat bewijzen is.
– Leerlingen die het oude programma kregen deden ook maar wat zonder te weten wat ze eigenlijk deden.
Laten we het verleden niet idealiseren door te zeggen dat leerlingen van vroeger tenminste wisten wat bewijzen was en die van nu helemaal niet meer. Ik ben ervan overtuigd, dat wat vroeger bewijzen heette in feite voor velen het gedwongen opereren op het denkniveau was, terwijl ze het eerste nog niet bereikt of niet voldoende geëxploreerd hadden.
Dat er desondanks toch leerlingen waren die wiskunde leuk vonden omdat ze wel gingen begrijpen wat bewijzen is, komt omdat ze door veel oefening toevallig dat hogere denkniveau bereikten. Ze werden daar niet systematisch toe gebracht. Op deze regel bestonden gelukkig uitzonderingen. Ik weet heel goed dat er toen ook leraren waren die zich bewust of onbewust aan een goede onderwijsstrategie hielden.
Tegen deze onsystematische manier van onderwijs geven kwam overal in de wereld verzet. Men wilde duidelijk nieuwe wegen op. Leerplanvernieuwers dachten die wegen te vinden in nieuwe onderwerpen en in het afschaffen van de verfoeide dril, die het inzicht doodt. (3).
Gewoonlijk was het een combinatie van beide: Nieuwe onderwerpen dragen bij tot beter inzicht, dacht men, en dus zijn de verfoeide routinesommen overbodig geworden. De vergissing was dat men ook voor het leren van de nieuwe onderwerpen de verschillende denkniveau's moet doorlopen zonder er eèn over te slaan.

Door het afschaffen van routine-opgaven ontnemen we onze leerlingen van nu een gelegenheid op een hoger niveau te komen. De situatie van nu lijkt te zijn (terwille van de duidelijkheid nog wat ongenuanceerd gezegd): wel veel meer leerlingen die wiskunde leuk vinden omdat ze op grondniveau mogen blijven werken, maar daar tegenover staat dat we de potentiële tweede niveau-ers geen gelegenheid geven om op hoger niveau te komen, al was het maar toevallig.

Het is allemaal wel begrijpelijk als men bedenkt dat reacties overdrijvingen oproepen. Maar er is een groot gevaar, dat we door tegenreacties weer naar de oude driltoestand terug dreigen te keren. We zullen verbeteringen van het wiskunde-onderwijs niet meer in de eerste plaats moeten zoeken in het aanbrengen van telkens weer andere systematiek van de wiskunde zelf. We moeten veel meer gaan nadenken over systematiek in het onderwijs in de wiskunde. En daar levert de theorie over denkniveau's een belangrijke bijdrage voor. Pas als we kans zien onze leerlingen te leren wat bewijzen is, kunnen we van ze verwachten dat ze deductieve redeneringen kunnen geven met begrip en inzicht.

10 Een paar slotopmerkingen.

a Ik heb niet gesproken over de wijze waarop we leerlingen van een niveau in een hoger kunnen helpen. Daarover heb ik al eens eerder geschreven (4). Ook Van Hiele (1) geeft er een goede tactiek voor.

b De theorie van de denkniveau's heeft nog andere implicaties voor het onderwijs. We kunnen niet verwachten dat we al onze leerlingen binnen de ons gegeven tijd op het tweede niveau kunnen brengen. Dat betekent dat we zullen moeten aanvaarden dat sommigen het grondniveau niet te boven kunnen komen en vooral dat we moeten aanvaarden dat deze leerlingen voor hun doen eerlijke echte wiskunde bedrijven. Ik ben van mening dat we, als we werkelijk ernst in differentiatie van het onderwijs willen maken, we het vooral in dit soort differentiatie van niveau zullen moeten zoeken.

1 Van Hiele, Begrip en inzicht (Purmerend, 1973).

2 Freudenthal, Mathematik als Pädagogische Aufgabe (Stuttgart, 1973) of Freudenthal, Mathematics as an educational task (Dordrecht, 1973) vertaling van het citaat uit de duitse uitgave van mij, J. v. D.).

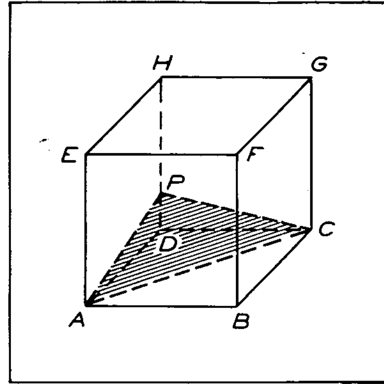
3 Zie bijvoorbeeld een van Katona's experimenten over dril in Wansink, Didactische oriëntatie voor wiskunde-leraren (Groningen, 1970).

4 Van Dormolen, Didactiek van de wiskunde (Utrecht, 1974), hoofdstuk 4.

Meetkunde en meetkundeonderwijs bij het MAVO

P. Th. SANDERS

Amsterdam

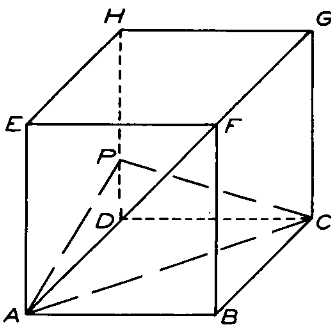


Voor de mavo-leerling is meetkunde het vak dat zich bezighoudt met driehoeken, vierhoeken en cirkels.
De meeste eigenschappen van deze figuren zijn uit een plaatje wel af te lezen en verder speelt natuurlijk de stelling van Pythagoras een grote rol bij het berekenen van lengten en oppervlakten.
De formules voor omtrek en oppervlakte van een cirkel behoren tot de parate kennis.
Al het andere wordt toch wel als algebra ervaren of iets dat daar veel van weg heeft en deze gedachte is begrijpelijk, immers, het werken met transformaties, zoals lijn- en puntspiegeling of een translatie komt toch meestal neer op het manipuleren met coördinaten, rekenen dus en het toepassen van eenvoudige transformatieformules.
Het werken met vectoren (alleen mavo 4) wordt helemaal niet als meetkunde ervaren, want ook hier is het rekenen hoofdschotel. Men zou de mavostof t.a.v. vectoren kunnen beschouwen als een inleiding tot de (vector)meetkunde, zoals deze bijvoorbeeld in de bovenbouw havo wordt behandeld.
De trigonometrie vindt voornamelijk haar toepassing in de sinus- en cosinusregel, ook al rekenen dus en meestal niet appellerend aan de kennis van de eigenschappen der planimetrische figuren.
In R3 tenslotte kunnen de leerlingen hun planimetrische en goniometrische rekenregels toepassen zonder werkelijk met stereometrische zaken als vlakken, kruisende lijnen, loodrechte stand e.d. geconfronteerd te worden.
Puntverzamelingen komen ook aan bod, vaak gekoppeld aan relaties (het aangeven van vlakdelen in het assenstelsel) of als 'de meetkundige plaats van punten' zoals de middelloodlijn van een lijnstuk, of de cirkel.

Meetkunde is een woord dat nauwelijks meer los gezien kan worden van begrippen als: intuïtie, bewijzen, inductie en deductie en ook het omgekeerde is waar.
Didactische problemen in de wiskunde, alsmede hervormingen daarin, hebben juist vaak plaats in de meetkunde.
De vraag wanneer bij het mavo meetkundeonderwijs de overgang van inductief naar deductief plaats vindt is welhaast onontkoombaar.

Het antwoord op deze vraag is niet de simpele vaststelling dat vier jaar mavo-wiskunde zo ongeveer gelijk te stellen is met drie jaar havo-wiskunde en dat we onze aandacht dus wel verder op laatstgenoemde vorm van onderwijs kunnen richten.
Er zijn tè veel verschillen.
De havo-leraar weet dat er in de bovenbouw nog veel stof zal volgen terwijl de mavo-leraar zich in eerste instantie zal richten op de exameneisen.
Daarom verdient m.i. ook de vraag of de havoleerling wellicht een andere 'wiskunde-attitude' heeft dan de mavoleerling eerst enige aandacht.
Het is beslist niet mijn bedoeling door generalisering een 'mavo-type' te creëren, om dan in het kader van dit stukje tot relevante konklusies te komen, want een 'mavo-type' bestaat niet, evenals het veelgehoorde: dat is een 'typische v.w.o.-leerling' geen verantwoorde onderwijsaanduiding kan zijn.
Genoemde attitude moet uiteraard alleen tegen de achtergrond van het huidige wiskunde-onderwijs gezien worden. Niet alleen ziet de mavoleraar zich vaak geplaatst voor een inhomogene groep (het is een feit dat de spreiding t.a.v. intellectuele vermogens bij het mavo groot is), maar bovendien is er al spoedig die belangrijke doelstelling, nl. zoveel mogelijk leerlingen door het wiskunde-examen te loodsen.
Dit heeft natuurlijk konsekwenties voor het onderwijs. Vooral in het laatste jaar zal de leraar zoveel mogelijk de 'stijl' van het schriftelijk examen willen benaderen en niet vaak de toch wel belangrijke 'zijpaden' betreden.
Uit ervaring weet ik dat het geven van een vergelijking in t in plaats van de vertrouwde x, het 'scheef' tekenen van een driehoek op het bord, de hoekpunten van een veelhoek A_1, A_2 ... noemen e.d. belemmerend werken in het tot een oplossing komen van het probleem.
In de havo-onderbouw betreedt de leraar dit soort zijpaden sneller, niet omdat de leerling daar om vraagt, maar omdat de leraar dit nodig acht en er ook ruimte voor is.
De leerlingen in de mavo-examenklas hebben meer baat bij algoritmen, handzame formules en ezelsbruggetjes: Voor de mavo-leraar (en toch ook voor sommige leerlingen) gaat een speels element, een 'inventief opereren' verloren en treedt een vervlakking van het wiskunde-onderwijs op (gebeurt dit ook niet in een eindexamenklas havo?). Natuurlijk hangen attitude, inductie en/of deductie ook samen met de 'mathematische' opvoeding.
In de brugklas wordt de mavoleerling geconfronteerd met balken, fraaie driehoeken en vierhoeken. Deze figuren sluiten aan bij de ervaringswereld van de leerling. In een balk zijn vanzelfsprekend de lichaamsdiagonalen even lang en in een gelijkzijdige driehoek gaan de zwaartelijnen door één punt.
Het kost de mavo-leerling later dan ook geen enkele moeite te aanvaarden, dat in iedere driehoek de zwaartelijnen deze eigenschap hebben. Wél kost het de leraar moeite de leerlingen af te leren een gelijkbenige driehoek te tekenen als er over een driehoek wordt gesproken of een vierkant als het een vierhoek betreft.
In de examenklas zal de leraar proberen het meetkunde-onderwijs af te stemmen op de groep, een uitspraak die evident lijkt, maar dat niet is, omdat hier bedoeld wordt dat de leraar met name bij het bewijzen soms meer zal

doen dan het examen formeel eist. Het is beslist niet ondenkbaar dat er leerlingen zijn, die behoefte hebben aan wat meer exactheid.
Het antwoord op de vraag of er een overgang is van inductief naar deductief meetkundeonderwijs zal dan ook vaak afhangen van de leraar en de klas. Deze overgang is bijvoorbeeld een feit bij een bewijs van de bewering dat de straal naar het raakpunt en de raaklijn aldaar loodrecht staan, immers deze bewering is voor velen intuïtief al triviaal.
Dezelfde intuïtie zal beslist niet toereikend zijn, om de formule voor de lengte van een lichaamsdiagonaal van een balk, $d = \sqrt{(h^2 + b^2 + l^2)}$ te doorgronden. Of de leerling belangstelling heeft voor het bewijs en niet alleen tevreden is met de handzame formule hangt enerzijds af van voornoemde attitude en anderzijds van de eisen die de leraar stelt. Vast staat in ieder geval, dat het bewijs niet teruggevraagd zal worden op een examen. Eigenlijk is bij het mavo het woord 'bewijs' min of meer taboe. Mocht er op het schriftelijk examen toch in de bewijsrichting gevraagd worden, dan doen de woorden: toon aan, leg uit of verklaar toch vriendelijker aan en geven bovendien de corrector de mogelijkheid intuïtieve benaderingen te waarderen.
De vwo-leraar klaagt vaak steen en been, want de leerlingen zijn na de brugperiode niet eens in staat aan te tonen dat twee driehoekjes congruent zijn. Zijn mavo-collega klaagt minder, het bewijzen speelt geen grote rol meer en de mathematische attitude: 'eerst moet iets bewezen worden' is in die korte tijd niet gemakkelijk meer aan te brengen.
Maar natuurlijk komt de mavo-leerling die verder studeert heus wel op z'n pootjes terecht, al zal de opmerking van een mavo-4 leerling in de vierde klas havo: de sommen zijn heus niet zo moeilijk, maar je moet zoveel bewijzen, nog vaak worden gehoord.
Wel ben ik van mening, dat er in de examens soms gebalanceerd wordt op de grens van: moet dit nu wel of niet bewezen worden. Met name in R_3 wordt er nog wel eens gespeculeerd op het inzicht van de kandidaat in veel voorkomende configuraties (zie voorbeeld).



1. Is driehoek ACP vanzelfsprekend gelijkbenig?
2. Is driehoek ACG zondermeer rechthoekig (?)
   (de mavoleerling kan dit laatste alleen met de omkering van Pythagoras aantonen).

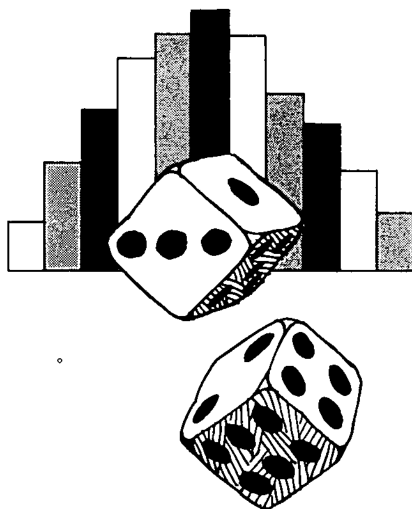
Samenvattend kan t.a.v. de meetkunde en haar onderricht bij het mavo het volgende gezegd worden:
De meetkunde vormt in de wiskunde voor het mavo beslist een zinvol deel, al zal de mavo-leraar soms het gevoel hebben dat hij niet genoeg variatie kan geven.

De leerlingen die behoefte hebben aan wat meer exactheid komen vaak door tijdgebrek niet aan hun trekken. De leraar zelf is gedwongen met name vectormeetkunde en stereometrie oppervlakkig te behandelen.
Wellicht zou het aan te bevelen zijn bijvoorbeeld de vectormeetkunde te laten vervallen en de stereometrie iets ruimer aan te pakken, of omgekeerd. In beide gevallen zal de mavo-leerling die naar het havo gaat, daar weinig nadeel van ondervinden. Hierdoor zouden de meetkundevraagstukken iets meer inhoud kunnen krijgen en er zou wellicht eens naar een deductieve benadering gevraagd kunnen worden.

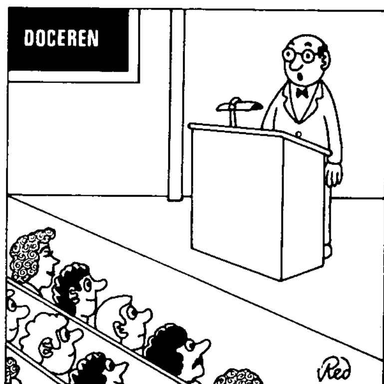
Mathematische Statistiek 1 voor het vwo

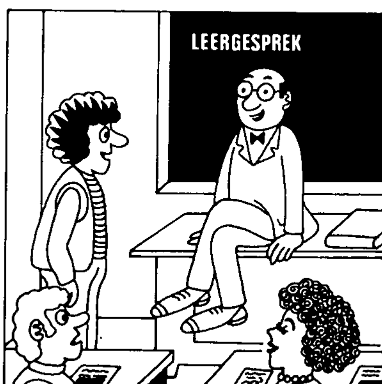
Auteursgroep JAGT

Wolters-Noordhoff



Werkvormen met Moderne Wiskunde



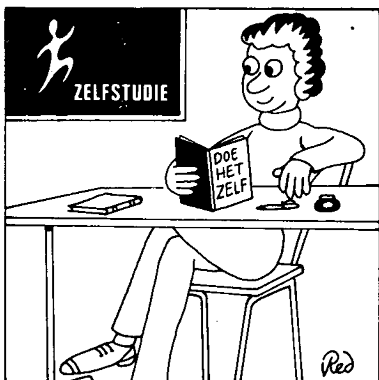


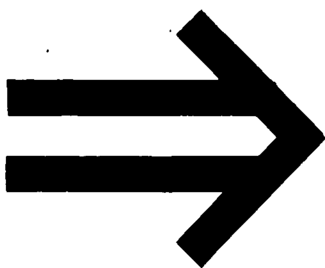
Wolters-Noordhoff




KLASSEGESPREK


GROEPSWERK
KRUISWOORD


ZELFSTUDIE
DOE
HET
ZELF



2844 1 75

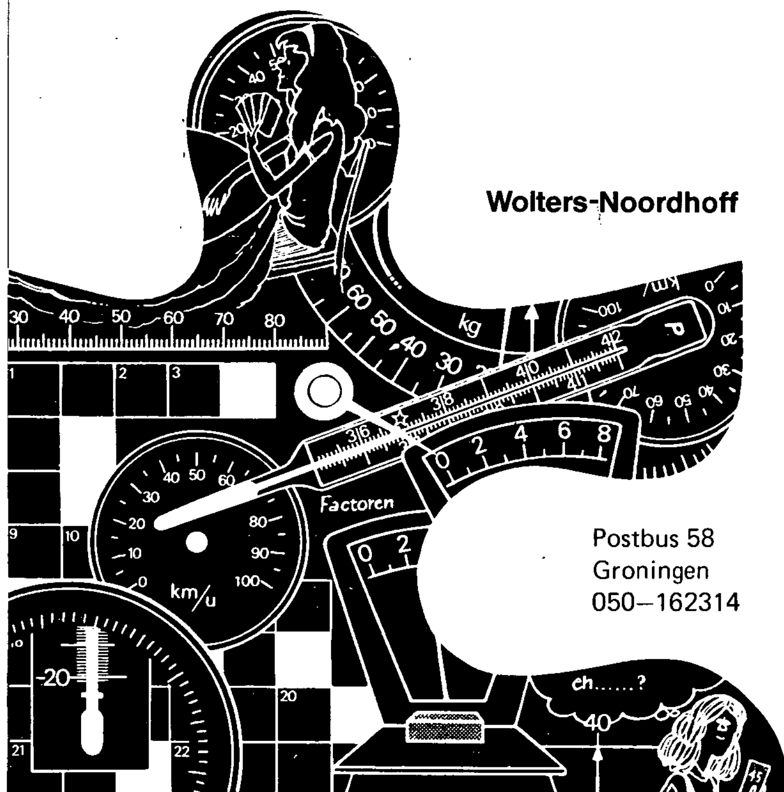
Passen en meten

Wiskunde/rekenen voor LBO/LAVO

E.D. Doevendans
L.A.G.M. Muskens
F. Paludanus
M. Sjamaar
J.E. Vellekoop

Differentiatie binnen klasseverband

Wolters-Noordhoff



2743 1 75

MEDEDELING VAN HET I.O.W.O.

Betreft.: WISKUNDE - UITGAVEN VWO

In de loop van het vorig schooljaar is door het I.O.W.O. mededeling gedaan over het beschikbaar stellen van een aantal uitgaven ten behoeve van het VWO.
De belangstelling voor deze uitgaven bleek dermate groot, dat produktie en verspreiding ons enige problemen bezorgden.
Een leerplanontwikkelingsinstituut als het I.O.W.O. is vanzelfsprekend niet geëquipeerd voor de verspreiding van grotere aantallen boeken.
Voor het ongerief dat leraren en/of leerlingen door de optredende vertragingen mogelijk ondervonden, bieden wij gaarne onze excuses aan.
Op basis van de huidige ervaring hopen wij de verzending het volgend jaar beter te kunnen regelen,

Mocht U nog nadere inlichtingen wensen over de VWO-uitgaven van het I.O.W.O., dan kunt U zich schriftelijk of telefonisch wenden tot:

I.O.W.O.
Tiberdreef 4 - Utrecht
tel. (030-611611)